

Über die Bedingungen der Möglichkeit einer deduktiven Theorie.

Ein Beitrag zu einer Mannigfaltigkeitslehre deduktiver Systeme.

Von

Fritz London, Bonn.

Zur Einleitung:

Problemstellung, Methode, Inhaltsübersicht der Untersuchungen.

§ 1. Die folgenden Untersuchungen forschen nach den Bedingungen, unter welchen sich in einem Wissenschaftsgebiet eine deduktive Theorie entwickeln läßt.

Die oft intendierte Idee einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre deduktiver Systeme halten wir gegenwärtig (seitdem wir uns im Besitze der Erkenntnisse einer reinen, mathematischen Mannigfaltigkeitslehre durch die genialen abstrakten Schöpfungen vor allem Cantors, Lies, Grassmanns befinden) für reif zu einer weitgehenden Verwirklichung. Ein geringer Anfang dieses bedeutamen und umfassenden Programms soll auf den folgenden Blättern versucht werden; in ihnen sind Resultate weitläufigerer Studien zusammengefaßt, welche ganz allgemein die ideale Verknüpfungseinheit einer Mannigfaltigkeit von Urteilen einer deduktiven Theorie zum Gegenstande hatten.

Nur unwesentlich haben moderne Forschungen die Lehre von den deduktiven Systemen näher berührt. Die außerordentliche Umgestaltung, welche die formale Logik in den letzten Jahrzehnten des verfloßenen Jahrhunderts durch die Bemühungen der sogenannten Logistiker¹⁾ (Boole, Frege, Peirce, Schröder, die Schule Peanos und vor allem Russell) erfuhr, erstreckte sich ausschließlich auf eine subtile Analyse der logischen Elementarprozesse, welche in gewissem Sinne vollständig durch Anwendung der symbolischen Methode eines Urteilskalküls (Pasigraphie) erfaßt wurden. Man befindet sich in der

1) H. Frege, Die Begriffsschrift (Halle 1879), Grdl. d. Arithm. (Breslau 1884), B. Russell u. Whitehead: A treatise on Universal-Algebra Bd. I (Cambridge 1898), G. Peano: Formulaire de Mathématiques (Turin 1891–1895), sowie die im Literaturverzeichnis unter 24, 31, 32, 34 zitierten Werke.

Tat durch diese scharffinnigen Untersuchungen in der glücklichen Lage, alle je in einer Theorie vorkommenden Prozesse, Beweise, Definitionen usw. in der erforderlichen Allgemeinheit zu kennen. Aber man beschränkte sich hierbei auf eine schärfste Beleuchtung und Klärung der kleinsten Teile, und nur zufällig¹⁾ findet sich vereinzelt eine Stimme, der Betrachtungen nicht überflüssig erscheinen, welche sich Theorien als Ganzes zum Gegenstande machen.

Im Gegensatz zu diesen mehr von mathematischen Interessen gelenkten logistischen Forschungen haben die neueren systematischen Darstellungen der Logik von seiten der Philosophen²⁾ das Vorhandensein und die Bedeutung dieses Problemkreises nicht verkannt, aber es lag die Bearbeitung dieser Fragen außerhalb des Bereiches, den sich jene logischen Untersuchungen gestellt hatten; denn Betrachtungen mathematischer Art sind in der Lehre von den deduktiven Mannigfaltigkeiten nicht zu umgehen.

§ 2. Sinngemäß jedoch sind wir nicht more geometrico vorgegangen, wurde keine Mengenlehre etwa über gewisse Mengen von Urteilen deduziert: Ein solches Verfahren würde, als selbst noch der Domäne des Mathematikers angehörend, sich selber miteinbegreifen. – Es war vielmehr angezeigt, ein regressives Verfahren einzuschlagen, durch welches die wesentlichsten Charaktere einer theoretischen Erkenntniseinheit herausgeschält und aufgewiesen, nicht zwar bewiesen werden. Wir erstreben Einsicht und nicht Beweis und halten eine andere Art der Begründung hier für unsinnig und unmöglich. Denn nicht um Konsequenzen wie in der Mathematik, sondern um Prinzipien³⁾ geht die Diskussion.

Dem deskriptiven Charakter der Untersuchungen entsprechend war es nicht zu umgehen, neue terminologische Festsetzungen zu machen, um die wichtigsten Gebilde eines allgemeinen deduktiven Systems überhaupt ergreifen zu können. Die sonst an gelehrten Kunstausdrücken so überproduktive traditionelle Logik erwies sich in dem betrachteten Gebiete als völlig unzureichend; und zwar aus einem sehr charakteristischen Grunde: Es zeigte sich nämlich von Bedeutung, daß die Theorie deduktiver Systeme wesentlich eine Relativtheorie⁴⁾

1) Siehe vor allem H. Padoa (22), dessen Einleitung »Introduction logique à une théorie déductive quelconque«, soweit mir bekannt, einzig sich unser Gebiet bewußt zum Gegenstande macht.

2) B. Erdmann (8), E. Hufferl (12) Bd. I², S. 227 ff., E. Cassirer (6) S. 4, 118 ff.

3) Das Wort in weitestem Sinne verstanden.

4) Nämlich »relativ« in bezug auf einen bestimmten, jedesmal anzugebenden, umfassenderen Bereich kompossibler Wahrheit.

ist, und daß wichtige logische Begriffe entsprechend überhaupt nur als Relativbegriffe gefaßt werden können. — Die Analogie mit der Theorie der allgemeinen Punktmannigfaltigkeiten, welche eine große Zahl ihrer Theoreme auszusprechen pflegt nur relativ zu einem bestimmten, umfassenden topologischen oder metrischen Raum, liegt auf der Hand; in der Tat war dieser Analogie eine starke Anregung — wenigstens für das Methodisch-Formale der Untersuchungen — zu verdanken.

Diese deskriptive Behandlung ist in der Hauptsache Thema der beiden Abschnitte »die Fundamente« und »die Architektonik einer deduktiven Theorie«. In ihnen sind auch einige schon wenigstens dem Mathematiker geläufige Dinge auseinandergesetzt, um für das Folgende ein festliegendes Fundament zu schaffen. Insbesondere befindet sich hier eine Analyse des Hilbertschen Verfahrens der »impliziten Definition« auf ihre wesensmäßigen Voraussetzungen hin, die ihrerseits keiner weiteren Formalisierung fähig und bedürftig sind. Aus dieser Analyse entwickeln wir ein jedenfalls hinreichendes Inventar derjenigen Grundbegriffe, welche zur Aufstellung des Axiomensystems einer beliebigen reinen Formaltheorie in ihrer wesensmäßigen Bedeutung einsichtig sein müssen.

Das »Problem einer Metrik in einer deduktiven Mannigfaltigkeit« ist der Gegenstand der beiden folgenden Kapitel (IV und V). Es wird dort zunächst der Begriff der »Potenz« eines Urteils eingeführt, welcher eine exakte Fassung dessen ist, was man gewöhnlich vage unter der »Allgemeinheit« oder dem »Ausagegehalte« eines Urteils zu begreifen glaubt.

Der Begriff der Potenz ist uns (im Kap. V) ein präzises Instrument zur Prüfung des alten Vorurteils, daß deduktive Prozesse notwendig zu Speziellerem herabführen (deducere!) müßten, wenn nicht in leeren Identitäten auf gleicher Stufe von Allgemeinheit fortgeschritten wird. Wir zeigen, daß gerade die charakteristischen theoretischen Schritte »reversible« Prozesse sind, die ohne triviale identische Substitutionen zu sein den Aussagegehalt der Prämissen völlig in den der Konsequenzen deduzieren. Erst hiermit gelangen wir zu einer tieferen Einsicht in die Struktur des Wahrheitszusammenhanges in den theoretischen Mannigfaltigkeiten. Diese Struktur ist wesentlich kein subordinierendes, sondern ein koordinierendes Verhältnis zwischen den Wahrheiten. —

Zum Schlusse bemerken wir noch, daß wir uns mit den in den letzten Jahren zu bedeutamem Aufsehen erschienenen Arbeiten von Weyl und Brouwer hier nicht auseinanderlegen, ohne jedoch hiermit

jene Meinung zu teilen, welche diese Forschungen als »Putzversuche« entkräftet zu haben meint. Wir halten die Arbeit im Gebiete der »regulären« theoretischen Mannigfaltigkeiten für so umfangreich und die aus diesen für die komplizierteren Mannigfaltigkeiten entspringenden Erkenntnisse für so bedeutend, daß wir es vorzogen, auf völlige Allgemeinheit zu verzichten und zunächst die gewohnte naive Einstellung beizubehalten. Wenn einmal die Elementarlehre deduktiver Mannigfaltigkeiten einigermaßen abgeschlossen vorliegt, wird man eher imstande sein, zu diesen subtilsten modernen Forschungen geeignete kritische Stellung zu nehmen. Eine solche Stellungnahme halten wir aber bei unserer gegenwärtigen Kenntnis, bei unseren unvollkommenen Begriffen von deduktiven Mannigfaltigkeiten für unmöglich, und demzufolge beginnen wir mit dem Aufbau einer Theorie der regulären theoretischen Mannigfaltigkeiten.

Erstes Kapitel.

Vorbereitende Betrachtungen.

§ 3. Eine notwendige Bedingung der Möglichkeit einer deduktiven Theorie.

Folgendes ist uns Problem: Es ist gegeben eine Mannigfaltigkeit von Erkenntnissen; und zwar sei diese gegeben nicht durch sukzessives Aufweisen der einzelnen Erkenntnisse, sondern durch einen regionalen Oberbegriff als ein idealer Bereich von Erkenntnissen. Eine derartige Mannigfaltigkeit ist im allgemeinen nicht abgeschlossen, ihre Zahl besitzt nicht notwendig eine endliche obere Schranke.

Es erhebt sich nun die Frage: Wie muß eine solche unbefchränkte Mannigfaltigkeit von Erkenntnissen beschaffen sein, damit sie durch ein endliches (und damit durch sukzessives Aufweisen zu erschöpfendes) System von Erkenntnissen begriffen werden kann?

Das Begreifen einer Erkenntnis durch andere geschieht vermittelt der apriorischen Einsichten der Logik. Das System von Erkenntnissen, das aus einer endlichen Zahl von Erkenntnissen auf Grund der logischen Gesetze gewonnen werden kann, heißt eine Theorie. In diesem Sinne also forscht unsere Frage nach den »Bedingungen der Möglichkeit einer Theorie« ¹⁾ in einem bestimmten Wissenschaftsgebiete.

¹⁾ Diese antithetische Formulierung zur Kantischen Fragestellung (nach den Bed. d. Mögl. der Erfahrung) stammt von E. Hufferl (12) Bd. I² § 65.

Einem jeden Wissenschaftsgebiet entspricht eine Mannigfaltigkeit von Urteilen, welche die Sachverhalte meinen, deren Erkenntnisse die betreffende Wissenschaft konstituieren. Den logischen Gesetzen über den Zusammenhang von Erkenntnissen entsprechen die syllogistischen Regeln über die Verknüpfung der Urteile.

Aus den elementaren Eigenschaften des Syllogismus erkennt man sogleich folgende Bedingung, die zwar nicht hinreicht, aber jedenfalls notwendig erfüllt sein muß, damit überhaupt in der betreffenden Mannigfaltigkeit von Urteilen der verlangte logische Prozeß möglich ist: Es ist notwendig, daß die Begriffe, die in den abzuleitenden Urteilen vorkommen, entweder selbst in den Ausgangsurteilen schon auftreten oder aus den Begriffen der Ausgangsurteile durch reine Nominaldefinition hervorgehen.

Diese Auslage erscheint garzu selbstverständlich. Trotzdem bildet sie den Ausgangspunkt für wichtige Fragestellungen. Keineswegs erfüllen im allgemeinen diese Forderung diejenigen Begriffe, welche in unseren Erkenntnissen auftreten: Psychogenetisch betrachtet gelangen wir zu Begriffen nicht immer durch Nominaldefinition aus anderen schon vorhandenen Begriffen, sondern zumeist durch Abstraktion von individuell gegebenen Gegenständen¹⁾. Unser Erkenntnis aber von einem Gegenstande ist einer unendlichen Fortentwicklung unterworfen – er ist eine unendliche Aufgabe (P. Natorp (21) S. 94). Dementsprechend unterliegt unser Begriff von einem bestimmten Gegenstande – als der Einheit aller in einer Gemeinvorstellung über ihn gedachten Merkmale – einer fortgesetzten Neubildung, und dieser Vorgang sich beständig umgestaltender und erweiternder Sachkenntnis kann schließlich zu Begriffen führen, die sich als reduzierbar erweisen: entweder der Eine aus anderen, oder Mehrere aus einem bisher unbekannten, gemeinsamen Oberbegriff. – Das ist in groben Linien der psychogenetische Prozeß, der von den primitiven Begriffen zu solchen Begriffen führt, die sich in den Organismus einer Theorie einfügen.

Uns ist es hier nicht um eine Klärung dieser Entwicklung zu tun, welche auf Grund der anthropologischen Gegebenheit unseres

1) Vgl. Kants Unterscheidung zwischen analytischen und synthetischen Definitionen (Logik § 100f.); zum Begriff des Goldes kommt man (bisher wenigstens) nur durch Abstraktion (analytisch) durch Aufweisen der wesentlichen Charaktere dieses bekannten Objektes (Farbe, Härte usw.). Synthetisch wäre eine Definition, wie sie sich die Bohr-Sommerfeldsche Atomtheorie zum Ziel setzt, als eine Synthese aus wenigen allgemeinen Elementarbegriffen „Elektron“, „Quantum“ usw., welche allein auf andere Art zu gewinnen sind.

individuellen Seins schließlich unsern Besitz an urteilsmäßiger Erkenntnis zu einem theoretischen System anzuordnen erlaubt. Von dem entgegengesetzten Blickpunkt aus untersuchen wir vielmehr: Wie muß das Ziel beschaffen sein (falls ein solches existiert), welches diese Entwicklung – von der psychologisch gegebenen Grundlage ausgehend – intendiert. Diese Untersuchung kann geführt werden, ohne den psychogenetischen Prozeß ins Auge zu fassen, und unabhängig davon, ob überhaupt in irgendeinem Wissensgebiet ein derartiges Ziel vorhanden ist.

In diesem Sinne also setzen wir von nun an folgenden Sachverhalt voraus und erfüllen damit die als notwendig erkannte Voraussetzung: Es werde nur ein solches Gebiet von urteilsmäßiger Erkenntnis betrachtet, dessen Gegenstandsbegriffe aus einer bestimmten, endlichen Zahl von »Grundbegriffen« (indefinables) durch reine Nominaldefinition hervorgehen.

Diese Aussage – trivial und stets erfüllt, wenn das Erkenntnisgebiet durch sukzessives Aufweisen der einzelnen Urteile abgeschlossen als notwendig endliche Mannigfaltigkeit vorliegt – erhält erst dann Bedeutung und wird in ihrer Möglichkeit problematisch, wenn die zu betrachtende Menge von Urteilen durch einen regionalen Oberbegriff¹⁾ gegeben ist; und in diesem Sinne gerade wird in jeder theoretischen Wissenschaft das Zutreffen der genannten Voraussetzung erwartet²⁾.

Die Erkenntnisgebiete, welche nach dieser einschränkenden Forderung Gegenstand unserer Betrachtung sind, lassen sich aus ihren Prämissen (deren Wahrheit, innerhalb der Theorie dogmatisch, durch Prozesse außerhalb derselben begründet ist) deduktiv entwickeln unter Betrachtung allein des Formalgehaltes dieser Prämissen; denn dieser deduktive Prozeß geschieht unabhängig von der jeweiligen inhaltlichen Bedeutung der in die Urteile eingehenden Begriffe. Wird zwar in praxi beim erstmaligen Aufbau einer jeden Theorie auf die Wesensbedeutung der einzelnen Begriffe, auf die schöpferische Kraft einer verstehenden Intuition nicht verzichtet werden können,

1) z. B. »Ortsveränderungen der Sonne«, »Chemische, d. h. materiell-substanzielle Vorgänge«.

2) Im Sinne der mathematischen Begriffsbildung würde man diese Voraussetzung präziser durch die Aussage fassen können: »Die Zahl der Grundbegriffe soll bei jeder beliebigen, unbefristet fortgesetzten Aufweisung der Urteile eines bestimmten Erkenntnisgebietes unter einer endlichen Schranke bleiben«. Dann kann kein Zweifel über den Sinn der Voraussetzung bestehen.

so ist man doch, wenn die Resultate auf diese Weise einmal erst begründet sind, nachträglich bemüht und imstande, völlig diese sekundären Momente wieder zu eliminieren und die Resultate als nicht mehr als formale Explikationen an ebenso formal betrachtete Voraussetzungen zu knüpfen. Einer durchaus geforderten, nicht apriorischen Wissenschaft werden dann diese reinen Theorieformen überwiesen als eine unfehlbare Totalität relativer Wahrheiten (vgl. E. Becher (1) S. 26). Diese Wissenschaft erst hat zu untersuchen, inwieweit eines dieser hypothetisch-deduktiven Systeme relative Beziehungen zwischen irgendwelchen Gegenständen aufweist, und in welchem Sinne dann Berechtigung zu einer Übertragung ihrer Resultate auf diese Gegenstände vorhanden ist. Dort erst wird beispielsweise die Frage nach der geometrischen Beschaffenheit des Erfahrungsraumes oder der Anwendbarkeit von Funktionen der Analysis zur Beschreibung empirischer Gesetzmäßigkeiten erörtert. Die Theorien selber werden aber ohne Bezugnahme auf solche Realisierungen – die durch ihre begriffliche Unschärfe Irrtümern Vorschub geben und Schlupfwinkel für allerlei Unsauberkeit mit sich führen – in größter Allgemeinheit entwickelt. Diese reinen Theorien sind der Gegenstand unserer Theorie. Sie hat sich demzufolge nicht auf erkenntnistheoretische, sondern einzig auf formallogische Voraussetzungen zu stützen.

§ 4. Endgültige Problemstellung.

Die oben formulierte Voraussetzung über die Beschränktheit der Anzahl der Grundbegriffe ist nur eine notwendige Bedingung für die Möglichkeit einer Theorie in einem Wissenschaftsgebiete. Wollten wir in der begonnenen Weise fortfahren, bis wir die hinreichenden Bedingungen vollzählig gefunden hätten, so würde sich eine Umständlichkeit des Untersuchungsganges bemerkbar machen, die sich oben schon zeigte: Wir würden gezwungen sein, immer wieder auf gewisse notwendige Beschaffenheiten der deduktiven Theorie als solcher zu verweisen, aus denen sich erst die Bedingungen herleiten, denen die Erkenntnisgebiete unterliegen müssen. Nun ist diese Herleitung der Bedingungen aus den spezifischen Eigenschaften der deduktiven Gebilde nicht sehr interessant und bereitet keine sonderlichen Schwierigkeiten, da sie aus den verschiedenen Eigenschaften der Theorie jedesmal auf Grund des gleichen Gedankens geschieht; wir können es füglich bei obiger einmaligen Darstellung bewenden lassen.

Wir nehmen darum den im § 3 vollzogenen Wechsel des Blickpunktes nunmehr definitiv vor und betrachten die notwendige Be-

schaffenheit des idealen Zieles, unabhängig von den materialen Eigenschaften der Erkenntnis. Wir fragen nicht mehr: »wie ist theoretisch geformte Erkenntnis möglich?« sondern: »wie ist theoretische Erkenntnis, falls sie möglich wäre, beschaffen?« Die Antwort auf die zweite Frage ergibt die formalen Bedingungen einer deduktiven Theorie. Unsere jetzige Problemstellung ist also in der früheren enthalten (und zwar, wie sich zeigt, wesentlich mit jener identisch); aber zugleich hiermit hat ein Standpunktwechsel stattgefunden, der es nunmehr erst ermöglicht, unter einer rein logischen Perspektive, frei von anthropologisch-psychogenetischen Gesichtspunkten, die Untersuchung vorzunehmen.

Zweites Kapitel.

Die Fundamente einer deduktiven Theorie.

§ 5. Die Definition der Grundbegriffe durch Relationen (Implizite Definitionen).

Nicht alle Voraussetzungen der Theoreme einer deduktiven Theorie können bewiesen, nicht alle Begriffe, die in diesen Theoremen auftreten, können definiert werden. Ein Anfangspunkt muß notwendig vorhanden sein, an welchem die Begriffsbildungen und Syllogismen beginnen. Mit andern Worten: Durch eine – jedenfalls von der logischen verschiedene – Erkenntnisgrundlage muß eine Anzahl nicht zu definierender Begriffe (Grundbegriffe) und nicht zu beweisender Urteile, die diese Grundbegriffe enthalten, (Axiome) gegeben sein.

Hiermit jedoch würde zuviel geleistet; für die Prozesse einer Theorie sind keine anderen Inhalte der Grundbegriffe von Bedeutung, als eben die relativen Beziehungen, welche die Axiome den unter diese Grundbegriffe fallenden Gegenständen zusprechen. Die Axiome können also die Rolle von Definitionen der Grundbegriffe übernehmen. Eine Theorie bedarf zu ihrem Aufbau nicht mehr als allein dieser relativen Eigenschaften zwischen nicht näher bestimmten Gegenständen. Sie gelangt von den Urteilen: »Alle S sind T« und »Alle T sind U« zu dem Resultate: »Alle S sind U« ohne zu wissen, was für Gegenstände unter S, T, U fallen, wenn nur feststeht, daß zwischen denselben die angeführten formalen Beziehungen bestehen. Infolgedessen ist eine und dieselbe Theorie häufig mehrerer Interpretationen fähig, indem sich verschiedene Gruppen von Gegenständen finden, welche die im Axiomensystem behaupteten relativen Eigenschaften aufweisen.“ In den mannigfachen Übertragungsprinzipien,

vor allem der Geometrie und der mathematischen Physik, kommt dieser Umstand zum Ausdruck. So sind beispielsweise die Gleichungen, welche die Vorgänge der Wärmeleitung resp. die der Flüssigkeitsströmung und die der Kräfte im elektrostatischen Felde beherrschen, in allen drei Fällen gleichlautend; es bedarf infolgedessen nur einer passenden Übersetzung des Inhalts, um die Resultate der einen Theorie auf die Gegenstände der anderen unmittelbar zu übertragen. Durch die Axiome werden die Begriffe nicht im üblichen Sinne erschöpfend definiert, insofern nämlich der definierte Begriff inhaltlich gar nicht festgelegt ist, sondern nur durch seine relative Beziehung zu anderen Begriffen charakterisiert wird. Durch die Axiome der projektiven Geometrie beispielsweise, in welcher jener bekannte von Poncelet und Gergonne aufgedeckte Dualismus besteht, daß zu jedem Raumgebilde ein ihm reziprokes konstruiert werden kann, derartig, daß zu jedem Satze über Punkte ein dual entsprechendes Gegenstück über Ebenen existiert, ist in keiner Weise der Punkt von der Ebene zu unterscheiden. Würde man jedoch versuchen, durch weitere Beschreibungen nun noch den Punkt, der doch offenkundig von der Ebene wesensverschieden ist, weiterhin noch näher zu charakterisieren, so würden diese Charaktere¹⁾ — so zweckdienlich sie auch der begrifflichen Anschauung wären — für den Aufbau der Theorie in der Folge nie zur Verwendung gelangen. Es liegt im Wesen der theoretischen Erkenntnis, im Gegensatz zu der primitiven in gewissem Sinne eine Totalität umfassenden untheoretischen (darum aber durchaus nicht unwissenschaftlichen) Erkenntnis, stets nur einen formalen Auschnitt darzustellen und in exakten Schritten eine schwarz-weiß Skizze der Strukturen zu zeichnen, welche nur das Gerippe der inhaltsreichen Farbenpracht unseres Erlebnisstromes bilden. Für einen derartig farblosen Auschnitt ist jeder Begriff durch die axiomatisch festgelegten relativen Beziehungen zu den übrigen Begriffen erschöpfend bestimmt, also für den betreffenden Bereich auch hinreichend definiert; denn innerhalb der Theorie trägt er außer diesen relativen keine weiteren Charaktere; anschaulich ist er noch durchaus wesensverschiedener Interpretationen fähig, welche jedoch für die theoretischen Verrichtungen ohne Bedeutung sind. Abgesehen davon aber wäre jene nähere Charakteristik der inhaltsverschiedenen Grundbegriffe überhaupt unausführbar, da sie sich notwendig auf weitere Begriffe zu stützen hätte. Die Schwierigkeit wäre also gar nicht beseitigt, sondern nur an eine andere Stelle verschoben.

1) Vgl. Euklids Charakteristik des Punktes: Σημείον ἐστὶν οὐ μέρος οὐδέν.

Es ist wesentlich das Verdienst D. Hilberts, zuerst klar erkannt und zugleich auch in mannigfachen »Axiomatiken« wirklich gezeigt zu haben, daß es für die Zwecke des Aufbaues einer Theorie hinreicht, die primitiven Begriffe ohne jede weitere Fundierung lediglich durch ihre wechselseitigen Beziehungen einzuführen.¹⁾ Be- gnügen wir uns, in dieser Weise die Grundbegriffe nur durch Axiome zu charakterisieren, so werden dieselben nicht im landläufigen Sinne definiert: nicht durch eine Gleichung, auf deren einen Seite der neue Begriff, auf der anderen ein bestimmtes Gefüge bekannter Begriffe (die ja nicht vorhanden sind) steht, sondern mehrere zugleich durch ein ganzes Gleichungssystem, in welchem jede einzelne Gleichung mehrere unbekannte Begriffe enthält. Man nennt²⁾ daher die Grundbegriffe »implizite definiert«, und da eine Theorie gerade nur dieser relativen Beziehungen bedarf, kann auf eine explizite Darstellung der Grundbegriffe füglich verzichtet werden. — Eine implizite Definition legt eine ganze Gruppe von Begriffen zugleich fest und zwar nicht anschaulich (absolut), sondern nur formal im Zusammenhang mit den anderen Begriffen einer Theorie (relativ). Die in diesem Sinne erschlossene Theorie schwebt also völlig entwurzelt in der Luft, sie ist durchaus in sich abgeschlossen und auf sich selbst gestellt. Es läge hierin nichts Unbefriedigendes, ließe sich zeigen, daß alle in dieser Weise überhaupt konstruierbaren Theorien nicht unabhängig nebeneinander bestehen, sondern bei passender Bezeichnung ihrer Formalobjekte sich zu einer einzigen Theorie zusammenfügen (welche Vermutung nach dem, was wir zu zeigen gedenken, vielleicht nicht so fernliegend erscheinen wird). Es ist nicht ausgeschlossen, daß wir uns schon im Besitze dieser höchst allgemeinen Formaltheorie befinden, aus welcher alle uns bekannten und noch nicht bekannten Theorien durch Spezialisierung hervorgehen, daß sie nämlich dargestellt wird durch jene sehr abstrakten und ganz allgemeinen mathematischen Disziplinen, welche als »Ausdehnungslehre«, »Theorie der Transformationsgruppen«, »Mengenlehre« im Grunde — ohne daß diese ihre allgemeinste Bedeutung ihren Schöpfern bewußt gewesen wäre — dieses eine Ziel intendieren: Eine Wissenschaft zu sein, welche ganz allgemein die möglichen Strukturen entwickelt, in denen überhaupt irgendwelche Gegenstände unseres Denkens sich zu theoretischer Einheit anordnen.³⁾

1) Die ersten und bedeutungsvollsten Anregungen in dieser Richtung gehen auf M. Pasch zurück (Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig [1882]).

2) Vgl. C. Burali-Forti (4), dessen einleitendes Kapitel »Les définitions logiques« auch weiterhin von Bedeutung ist, und M. Schlick (33), S. 30 ff.

3) Vgl. E. Hufferl (12), Bd. I, S. 247 ff.

§ 6. Die Definition der Relationen durch
Verknüpfungsgesetze.

Wir wollen der Kürze halber von nun an den ohnehin tautologischen Terminus »relative Beziehung« durch die Bezeichnung »Relation« ersetzen. Nicht alle Urteile beschränken sich darauf, Relationen zwischen Gegenständen zu behaupten, wohl aber erschöpft sich in einer solchen Aussage der Sinn eines Urteils einer deduktiven Theorie. An den Ausgangspunkt irgendeiner Theorie zurückgehend, gelangten wir zu einem System von Urteilen, den Axiomen, welche die Grundbegriffe der Theorie implizite definieren; hierbei werden die Grundbegriffe festgelegt durch die Relationen, welche nach Aussage der Axiome zwischen den einzelnen Gegenständen bestehen, welche unter die betreffenden Begriffe fallen. Werden die Grundbegriffe also durch Relationen definiert, so erhebt sich unmittelbar die weitere Frage: Sind die Relationen, als eine nicht weiter zurückzuverlegende Grundlage jeder Theorie, durch unmittelbare Erkenntnis einsichtig zu machen, oder gibt es etwas noch primitiveres, wodurch sich die verschiedenen Relationen spezifizieren lassen, welches also als logisches Prius zu betrachten wäre? – Zweifellos ist eine Relation (z. B. $<$, $=$) etwas ebenfowenig in seiner ganzen Bedeutung Erklärbares, wie die Grundbegriffe der Theorien (Punkt, Zahl ufw.). Aber derselbe Weg, der dort eingeschlagen wurde, führt auch hier auf einen wesentlichen Gedanken: Kamen für die Prozesse innerhalb der Theorie keine anderen Inhalte der Grundbegriffe in Frage, als die Relationen, welche zwischen den Individuen der Grundbegriffe bestehen, und genügte es daher, die Begriffe allein durch Angabe dieser Relationen zu definieren, so wird es hier entsprechend hinreichend sein, die Relationen ihrerseits durch dasjenige Merkmal zu charakterisieren, durch welches sie sich in der Theorie unterschiedlich bemerkbar machen. Dieses aber ist das Verknüpfungsgesetz. Die Angabe des Verknüpfungsgesetzes – als der differentia specifica der einzelnen speziellen Relationen – ist infolgedessen geeignet, dieselben hinreichend voneinander begrifflich zu trennen. Der Begriff einer Relation selbst aber muß dazu, als allgemeines genus proximum, schon vorher in seiner ganzen Bedeutung als bekannt vorliegen. Ob man jede Relation allein durch Angabe ihres Verknüpfungsgesetzes genügend charakterisieren kann, ist hierdurch in keiner Weise behauptet, ebenfowenig wie man nicht alle Begriffe durch implizite Definitionen definieren kann. Aber es geht aus dem Gefagten hervor, daß die Definition der Relationen durch Verknüpfungsgesetze – ebenso wie die implizite Definition der Grund-

begriffe durch Relationen (Axiome) – jedenfalls gerade diejenigen Gebilde erschöpfend erfaßt und voneinander zu sondieren vermag, die in einer rein deduktiven Theorie als verschiedene Gegenstände auftreten.

Worin besteht nun die Aussage eines Verknüpfungsgegesetzes? Die Einführung eines Hilfsbegriffes wird uns die Antwort auf diese Frage erleichtern: Ist \mathfrak{R}_n eine Relation, die zwischen n Gegenständen in bestimmter Reihenfolge bei passender Wahl der n Gegenstände besteht – anderenfalls nicht besteht, so bezeichnen wir als den Umfang $\{\mathfrak{R}_n\}$ dieser Relation die Menge der Fälle, in denen die betreffende Relation besteht. Wir können uns diesen Umfang abgebildet denken durch die Menge von allen geordneten n -elementigen Gruppen von Gegenständen, welche in dieser Anordnung in der n -gliedrigen Relation \mathfrak{R}_n zueinander stehen. Es ist jedoch zu beachten, daß diese Abbildung auf Mengen von Gegenstandsgruppen nichts ist als ein eindeutiges Beziehen, nicht etwa ein Identifizieren. Aber alle Prozesse an Relationsumfängen finden auch an diesen leichter zu betrachtenden Mengen statt und sind dort unmittelbar zu erkennen. Der »Umfang einer Relation« steht in einer sehr einfachen Beziehung zum »Umfange eines Begriffes«, wie ihn die Logik kennt, er ist nämlich ebenfalls ein Umfang eines Begriffes, und zwar des Begriffes des Sachverhaltes, welchen die Relation besagt. Unsere Terminologie ist also eigentlich überflüssig und streng genommen sogar falsch, indem, was wir »Relationsumfang« nennen, schon als »Umfang des Begriffes des von der Relation beschriebenen Sachverhaltes« mit dem Wortsatze der traditionellen Logik bezeichnet wird. Aber unser Sprachgebrauch ist weniger mühsam und wird schwerlich zu Mißverständnissen führen. Ebenso wie unter dem Umfange eines Begriffes die Menge der Gegenstände zu verstehen ist, welche unter den betreffenden Begriff fallen, so bedeutet analog der Umfang einer Relation die Menge der Sachverhalte, die der betreffenden Relation entsprechen. Auch ein Sachverhalt ist ein Gegenstand, wenn wir den Terminus »Gegenstand« in jenem ganz allgemeinen Sinne verstehen, wie er vor allem durch die Arbeiten H. Meinongs (s. vor allem [19]) in der philosophischen Literatur üblich wurde. Es sind dann sowohl die Begriffs- wie die Relationsumfänge Mengen von Gegenständen, im letzteren Falle sind diese Gegenstände insbesondere Sachverhalte. Eine scharfe Unterteilung des Begriffes »Gegenstand im Meinongschen Sinne« in einerseits Sachverhalte, anderseits Gegenstände im engeren Sinne scheint weder erschöpfend zu sein, noch sich überhaupt konsequent durchführen zu lassen. – Uns interessieren jedoch diese Fragen hier nicht.

Man kann aus mehreren Relationen ¹⁾ $\mathfrak{A}_l, \mathfrak{B}_m, \mathfrak{C}_n$ eine neue Relation bilden, welche das logische Produkt $\mathfrak{A}_l \cdot \mathfrak{B}_m \cdot \mathfrak{C}_n$ heißt und als Sachverhalt das gleichzeitige Bestehen der einzelnen Relationen behauptet. Es entsteht hierbei eine Relation, deren Gliederzahl gleich der Summe der Gliederzahlen der ursprünglichen Relationen ist. Der Umfang eines derartigen Relationsproduktes ist diejenige Menge, deren Elemente zugleich allen Umfängen der Faktoren angehören, welche Menge gewöhnlich als der »Durchschnitt« der Faktormengen bezeichnet wird. Wir können bei einem Produkt (und auch bei jeder einzelnen Relation) für bestimmte Glieder vorschreiben, daß sie stets jedesmal denselben Gegenstand in Relation setzen sollen; es entsteht dann eine Relation, die q Glieder weniger hat als die ursprüngliche, wenn $2 \cdot q$ Glieder in dieser Weise paarweise miteinander identifiziert werden. ²⁾

Man kann auch aus einer einzigen Relation \mathfrak{A}_n durch Produktbildung eine neue $q \cdot n$ -gliedrige Relation zusammensetzen, welche zwischen einer geordneten Gruppe von $q \cdot n$ Gegenständen besteht, wenn zwischen q Untergruppen von je n Gegenständen die ursprüngliche n -gliedrige Relation \mathfrak{A}_n zugleich besteht. Jedoch ist hierbei noch hinzuzufügen, daß die $q \cdot n$ Gegenstände ausdrücklich verschieden sein müssen; anderenfalls ist nämlich $\mathfrak{A}_n \cdot \mathfrak{A}_n \cdot \mathfrak{A}_n \dots$ offenbar $= \mathfrak{A}_n$; indem nämlich die n Gegenstände nur q -mal durchlaufen zu werden brauchen, um die Relation $\mathfrak{A}_n \cdot \mathfrak{A}_n \cdot \mathfrak{A}_n \dots$ (q -mal) zu erfüllen, wenn sie die Relation \mathfrak{A}_n schon erfüllen. Es können bestimmte der $q \cdot n$ Glieder ausdrücklich identifiziert werden, etwa $2p$, dann hat die entstehende Relation $qn - p$ Glieder. Etwa aus der Relation $a < b$ » a kleiner als b « kann man das 4-gliedrige Produkt bilden $a < b \cdot c < d$. Diese Relation zwischen 4 Gegenständen sagt nur dann etwas Neues (und hat einen kleineren Relationsumfang) gegenüber der ursprünglichen, wenn $a \equiv c$ zugleich mit $b \equiv d$ ausgeschlossen ist. Oder aber man kann auch einzelne Identitäten gerade vorschreiben, etwa $a \equiv c$, dann ist $a < b \cdot a < d$ eine 3-gliedrige Relation. — Uns genügen diese wenigen Bemerkungen aus dem Logik-Kalkül, welche natürlich keinen Anspruch auf Vollständigkeit machen. Weyl glaubt,

1) Der Index einer Relation ist das Zeichen für eine Zahl, nämlich die Zahl der Gegenstände, zwischen denen in jedem Fall der Relationsfachverhalt besteht; so drückt die Summenrelation $a + b = c$ eine Beziehung von drei (geordneten) Gegenständen aus; wir nennen sie deshalb eine »dreigliedrige« Relation und bezeichnen sie etwa durch \mathfrak{S}_3 .

2) H. Weyl nennt (35) diesen Prozeß der Identifizierung einzelner Relationsglieder »zur Deckung bringen von Leerstellen eines Urteilschemas«.

in seinem zitierten Werke eine erschöpfende Darstellung dieser Operationen angegeben zu haben.

Es ist uns jetzt ein leichtes zu erklären, worin die Aussage des Verknüpfungsgesetzes einer Relation besteht: Sie ist ein Subsumptionsurteil über die Umfänge zweier Relationen, die aus der betreffenden Relation (und eventuell auch aus schon bekannten Relationen) durch die beiden oben erklärten Kompositionsmethoden, des logischen Produktes und der Identifizierung von Relationsgliedern zusammengefaßt sind. Die Relation mit kleinerem Umfange ist das Subjekt, die andere das Prädikat dieses Subsumptionsurteils.

Wir geben das Verknüpfungsgefaß der Relation $a < b$ »a kleiner als b« an. Wir bilden das Produkt dieser Relation mit sich selbst und identifizieren das 1. Glied der einen und das 2. Glied der anderen Relation, wir erhalten die 3-gliedrige Relation:

$$a < b \cdot b < c.$$

Deren Umfang $\{a < b \cdot b < c\}$ soll – das ist die Aussage des Verknüpfungsgesetzes – eine Teilmenge des Umfanges $\{a < c\}$ sein. Benutzen wir das bekannte mengentheoretische Zeichen \subset für die Beziehung zwischen Teil und Ganzem, so erhalten wir:

$$\{a < b \cdot b < c\} \subset \{a < c\}.$$

Das ist der Ausdruck des Verknüpfungsgesetzes: Aus $a < b$, $b < c$ folgt $a < c$.

Durch eine oder mehrere derartige Subsumptionsausagen geschieht die Definition der Relationen, welche formal übereinstimmt mit der impliziten Definition der Grundbegriffe und infolgedessen in den bekannten Axiomatiken von dieser nicht getrennt wird.

§ 7. Skizzierung des Inventars unmittelbarer Erkenntnis einer reinen Mannigfaltigkeitslehre deduktiver Systeme.

Fassen wir nun kurz zusammen, welcher Begriffe wir bedürfen, um das Verknüpfungsgefaß einer Relation anzugeben. Da durch dieses die Relationen und durch die Relationen weiterhin die Grundbegriffe definiert werden, so werden diese »Urbegriffe« die Basis der Begriffsbildung jeder nur möglichen rein deduktiven Theorie, die Grundlage der »mathesis universalis« Leibnizens, der reinen Mannigfaltigkeitslehre im Sinne Hufferls, ausmachen. Sie stellen das Inventar jener Begriffe dar, die nicht durch den formalen Prozeß einer Nominaldefinition oder impliziten Definition schließlich wieder auf schon bekannte Begriffe zurückgeführt werden können, sondern durch unmittelbare Erkenntnis der gemeinten Gegenstände konzipiert sein müssen.

Einfichtig muß zunächst sein: die Wesensbedeutung des »Allgemeinbegriffs einer Relation überhaupt« zwischen Gegenständen, was seinerseits zugleich erfordert, daß bekannt ist, was unter »Gegenstand« zu verstehen ist. Es gehört weiterhin zum Verständnis einer Relation überhaupt der Begriff der Ordnung von Gegenständen, denn es ist im allgemeinen nicht gleichgültig, in welcher Reihenfolge die betreffenden Gegenstände in Relation stehen. Da sich die Relationen nach der Anzahl der durch sie in Beziehung gesetzten Gegenstände unterscheiden, so ist auch jedenfalls Einficht in den Anzahlbegriff zu fordern.

Diese vier Begriffe des Gegenstandes, der Anzahl, der Ordnung und der Relation genügen zur Einficht in den Sachverhalt:

$$\mathfrak{R}_n (x_1, x_2, x_3 \dots x_n).$$

»Die Gegenstände $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ stehen in dieser Reihenfolge in der n -gliederigen Relation \mathfrak{R}_n «, wobei \mathfrak{R}_n eine im übrigen völlig unbekannte Relation ist.

Erst das Verknüpfungsgesetz ergibt die spezifizierende Charakteristik dieses noch unbestimmten Allgemeinbegriffes der Relation \mathfrak{R}_n . Es benötigt den Begriff des logischen Produktes zweier Relationen:

$$\mathfrak{R}_n (x_1 x_2 \dots x_n) \cdot \mathfrak{S}_m (y_1 y_2 \dots y_m).$$

»Die Gegenstände $x_1 x_2 \dots x_n, y_1 y_2 \dots y_m$ stehen zugleich und in dieser Reihenfolge in den betreffenden Relationen.« — Es benötigt weiterhin Einficht in den Begriff des Sachverhaltes einer Relation und die Fähigkeit, den Umfang dieses Begriffes zu bilden, »die Menge der Sachverhalte, in denen die betreffende Relation besteht«. Wir nannten diese Menge unzweideutig der Kürze halber einfach den »Umfang der Relation«. — Die Subsumptionsausage des Verknüpfungsgesetzes verlangt Einficht in das Verhältnis zwischen Menge und Teilmenge. Man darf nicht glauben, dieses Verhältnis, als Relation \subset , durch ihr Verknüpfungsgesetz (»der Teil des Teils ist Teil des Ganzen«) implizite definieren zu dürfen, denn die Definition würde ja schon die Kenntnis dieser Relation voraussetzen. Abgesehen davon aber wäre hier das Verknüpfungsgesetz unzureichend zum Verständnis der Subsumptionsbeziehung, denn von dieser Relation bedürfen wir nicht nur ihrer Verknüpfungsregel, sondern der vollständigen Einficht in den Bedeutungsgehalt ihrer Aussage. — Die Aussage der Subsumption von Relationsumfängen wird dann erst und nur dann zur wirklichen Aussage des Gesetzes einer Relation, wenn zwischen Gegenständen, die an bestimmten Gliedern des Subjektes resp. des Prädikates auf-

treten, eine Festlegung getroffen wird, daß sie entweder identisch oder gerade nicht identisch sind. Denn ohne solche Bestimmungen wäre die Subsumption nichtslegend, da diese für alle Relationen von selbst besteht, und damit wäre eine charakterisierende Aussonderung der einzelnen Relationen ausgeschlossen. Die Aussage der Identität und ihrer Negation muß also gleichfalls in ihrer Bedeutung einsichtig sein. Auch sie darf und kann nicht als Relation \equiv durch ihr Verknüpfungsgeß (Transitivität, Symmetrie) definiert werden, da diese Definition aus demselben Grunde zirkelhaft und außerdem unzureichend wäre, wie diejenige der Subsumptionsbeziehung.

Dieses also wäre der Bereich unmittelbarer Erkenntnis, welcher vereint mit den Prinzipien der reinen Logik, soweit sie nicht schon in obiger Aufzählung mit einbegriffen sind, das Inventar der Urbegriffe jeder deduktiven Theorie erschöpft. (Es fehlt noch ein Begriff, den wir alsbald nachholen werden.) Unser Inventar ist ausreichend, aber es ist noch reduzierbar. Wir wollen uns jedoch hier nicht auf die subtile Untersuchung der Unabhängigkeit einlassen, die vor allem durch die Schule Peanos bewerkstelligt wird, und die als wichtiges Ziel sich setzt, die noch im Inventar befindlichen nicht-logischen Begriffe der Ordnung und der Zahl auf rein logische zurückzuführen. Diese Untersuchungen sind außerordentlich schwierig dadurch, daß, wie wir sehen, es bei den Urbegriffen durchaus nicht genügt, nur ihre relativen Eigenschaften zu kennen, da sie bei ihrer Anwendung zu theoretischen Verrichtungen in ihrem Bedeutungsgehalt verstanden sein müssen. Wir lassen diese noch durchaus in der Schwebe befindliche Frage nach der irreduziblen Gruppe der Urbegriffe offen, da sie für das Folgende belanglos ist, und benutzen diese Gelegenheit zu einer Namengebung, indem wir als die »logischen und ordinalen Grundbegriffe« die oben aufgestellte Sammlung bezeichnen, deren wesensmäßige Kenntnis jedenfalls dazu hinreicht, um die impliziten Definitionen einer deduktiven Theorie zu vollziehen.

§ 8. Subsumptions- und Existentialaxiome.

Wir wollen diese abstrakten Betrachtungen dadurch etwas beleben und dem Verständnis näher bringen, indem wir kurz den Weg in umgekehrter Richtung skizzieren, als wir ihn bisher beschritten haben. Denn offenbar ist die Auffindung der unbekannten abstrakten Grundlage einer Mannigfaltigkeit schwieriger, als die nachträgliche Herleitung der Mannigfaltigkeit aus der einmal gefundenen und nun als gegeben vorliegenden Basis.

Der Aufbau einer deduktiven Theorie aus den logischen und ordinalen Grundbegriffen, welche in unmittelbarer Erkenntnis einfach sind, wird folgendermaßen vor sich gehen:

1. Definition der zu verwendenden Relationen. Es wird zunächst durch ihre Verknüpfungsgesetze eine Anzahl von Relationen definiert. Wir wählen als Beispiel die dreigliedrige Relation $\mathfrak{S}(x, y, z)$, die zwischen Summanden und Summe besteht und in gewöhnlicher Schreibweise $x + y = z$ lautet. Nehmen wir etwa das kommutative Gesetz:

Sind a, b, c Gegenstände irgendwelcher Art, so besteht die Summenrelation \mathfrak{S} in der Reihenfolge a, b, c zwischen ihnen jedenfalls nur dann, wenn sie auch in der Reihenfolge b, a, c besteht. Als Subsumption von Relationsumfängen ausgedrückt erhalten wir also

$$\{\mathfrak{S}(a, b, c)\} \subset \{\mathfrak{S}(b, a, c)\}$$

Das assoziative Gesetz: $\underbrace{(a + b)}_e + c = a + \underbrace{(b + c)}_f = d$

»Ist $a + b = e$ und $b + c = f$ und $e + c = d$, so ist auch $a + f = d$ «, formuliert sich folgendermaßen als Subsumptionsauslage: Sind a, b, c, d, e, f Gegenstände irgendwelcher Art, so besteht die Summenrelation zwischen a, b, e ; b, c, f ; e, c, d in dieser Reihenfolge zugleich nur dann, wenn sie gleichzeitig auch zwischen a, f, d besteht:

$$\{\mathfrak{S}(a, b, e) \cdot \mathfrak{S}(b, c, f) \cdot \mathfrak{S}(e, c, d)\} \subset \{\mathfrak{S}(a, f, d)\}$$

Die identischen Relationsglieder sind hierbei schon durch Benutzung des gleichen Buchstabens an den betreffenden Stellen kenntlich gemacht. In dieser Weise können nun alle Relationen durch ihre Verknüpfungsgesetze eingeführt werden. Es werden natürlich auch Produkte verschiedener Relationen auftreten, z. B. beim Distributionsgesetz $a(b + c) = ab + ac$, welche die Verknüpfungen der Relationen untereinander festsetzen. Ist $\mathfrak{M}(a, b, c)$ die Multiplikationsrelation $a \cdot b = c$, so schreibt sich das Distributionsgesetz:

$$\{\mathfrak{M}(a, b, d) \cdot \mathfrak{M}(a, c, e) \cdot \mathfrak{S}(b, c, f) \cdot \mathfrak{M}(a, f, g)\} \subset \{\mathfrak{S}(d, e, g)\}$$

Es ist vielleicht nicht überflüssig zu bemerken, daß in dieser Auffassung die Gesetzmäßigkeit einer Relation unabhängig von der Gegenstandskategorie ist, auf welche sie angewandt wird. Eine nicht kommutative Addition (z. B. der transfiniten Ordinalzahlen) ist gar keine Addition; sie ist eine andere Relation, denn sie hat ein anderes Verknüpfungsgesetz. Es gibt Kategorien von Gegenständen, zwischen welchen eine bestimmte Relation bestehen kann, und andere, zwischen welchen dies unmöglich ist. Uns, die wir die Relationen als das *πρότερον τῇ φύσει* erkannt haben und sie vor den Gegenständen

deshalb definieren, erscheint diese Auffassung des rein ordinalen Wesens einer Relation selbstverständlich. In der modernen Mathematik, welche sich zwar die Entkleidung alles Gegenständlichen bis auf sein rein formales Skelett in der von uns skizzierten Weise zum prinzipiellen Leitfaden gemacht hat, ist im allgemeinen diese selbstverständliche Konsequenz für die Auffassung der Relationen nicht durchgeführt. Den Relationen ist noch immer ein Erdenrest zu tragen peinlich, der sie mit der für ihre Funktion bedeutungslosen Gegenstandswelt verknüpft. Die Addition erscheint noch immer als jener anschauliche Akt des Verbindens verschiedener Mengen, eine Operation von höchster Unbestimmtheit, deren Wesen je nach den durch sie bezogenen Gegenständen die verschiedenartigste Gestalt annimmt, und welche in unmittelbarer Erkenntnis einsichtig zu machen, unsicher und jedenfalls überflüssig ist. — Unsere Auffassung des absoluten, d. h. unveränderlichen Wesens einer Relation ist zunächst nur eine terminologische Festsetzung; es wäre aber wichtig, eine einheitliche Auffassung zur Durchführung zu bringen, es wäre viel mysteriöse Spekulation hierdurch vermieden worden.

2. Definition der Grundbegriffe. Haben wir in dieser Weise eine Anzahl von Relationen durch ihre Verknüpfungsgeetze definiert, welche Geetze in dem oben (§ 5) geschilderten Sinne Grundurteile (Axiome) der Theorie darstellen, und die wir wegen ihrer formalen Eigenart »Subsumptionsaxiome« nennen wollen, so treten wir nunmehr zur impliziten Definition der Grundbegriffe. Wir hatten zur Definition der Relationen nur der Kenntnis einer Mannigfaltigkeit von »Gegenständen überhaupt« von »Etwassen« bedurft, in welcher zwar geordnete Vielheiten, nicht aber individuell als solche näher determinierte Einzelgegenstände erkennbar sein mußten. Eine beliebig aus dieser gänzlich homogenen Mannigfaltigkeit herausgegriffene geordnete Vielheit von »Etwassen« konnte der zu definierenden Relation entweder genügen oder nicht genügen. Welche der herausgegriffenen Vielheiten genügen, brauchte ebenfalls nicht bekannt zu sein und wäre außerdem auch solange unmöglich zum Ausdruck zu bringen, als die Individuen durch keine anderen Merkmale als der Identität resp. Nichtidentität schon einzeln bezeichnbar sind. Es genügt vielmehr zur Definition der Relation anzugeben, daß, falls sie in einer geordneten Vielheit (unbekannt in welcher) besteht, sie zugleich auch in einer bestimmten aus dieser Vielheit durch Umordnung entstehenden Vielheit bestehen soll. Auf diese rein ordinale Aussage ist der Inhalt der Relationen beschränkt, den die Prozesse der deduktiven Theorie benötigen.

Aus der noch völlig homogenen Mannigfaltigkeit der »Etwasse«, in welcher die einzelnen Individuen, wie die Eier im Eierkorb, unterschiedslos einander gleichwertig sind und einzig unter den gemeinsamen obersten Oberbegriff des »Etwas«, des »Gegenstandes im allgemeinsten Sinne« fallen¹⁾, werden nunmehr einzelne Artbegriffe von idealen Gegenständen in folgender Weise mittels der Relationen spezifizierend herausgehoben:

Sei etwa \mathcal{M}_n eine schon definierte, also in ihrem Verknüpfungsgeß bekannte n -gliedrige Relation, so können durch sie n Begriffe $A, B, C, \dots N$ beschrieben werden, indem man angibt: Ist a ein Gegenstand, der unter den Begriff A fällt²⁾, so soll es ein (oder auch: zwei, drei ... mindestens ein) $b \in B$ und ein (zwei, drei ... oder: mindestens ein) $c \in C$ usw. ... bis $n \in N$ geben, derartig, daß $\mathcal{M}_n(a, b, c, \dots n)$ besteht. Hiermit sind die Begriffe $A, B \dots N$ charakterisiert durch die relativen Eigenschaften ihrer Individuen; andere Eigenschaften als diese anzugeben, ist aber, wie wir wissen, überflüssig für die Prozesse in einer Theorie. Diese Angabe leistet die implizite Definition, die wir durch obige Darstellung entwickelt haben. Es können nun auf diese Weise mehrere derartige relative Eigenschaften einem einzigen Grundbegriff zuerteilt werden, welches Verfahren jedoch nur solange fortsetzbar ist, als sich die einzelnen Festsetzungen nicht widersprechen. — In den bekannten Axiomatiken werden meist die Definitionen der Relationen von denen der Grundbegriffe nicht getrennt, wie wir es hier vorgezogen haben; vielmehr wird gewöhnlich das Verknüpfungsgeß der Relationen nur für den Fall definiert, daß sie auf eine (hierdurch zugleich definierte) bestimmte, eben die gerade gebrauchte Gegenstandskategorie bezogen sind. Der Nutzen dieser Auffassung vom ökonomischen Standpunkt, der diesen Axiomatiken Grundprinzip ist, fällt in die Augen. Aber

1) Es ist eine naheliegende Frage, inwieweit die Relationen ihrerseits unter den Begriff des »Gegenstandes überhaupt« fallen; der naive Standpunkt, der diese Frage wohl unbedingt bejahen dürfte, ist im folgenden beibehalten. Er ist auch für das Vorgehen der Mathematik typisch, welche oft Relationen als Objekte wie Gegenstände behandelt. Trotzdem sprechen starke logische Bedenken gegen diese naive Auffassung, die uns jedoch hier zu weit führen würden. Es ist nicht ausgeschlossen, daß sich von hier aus Einsicht in die mengentheoretischen Paradoxien gewinnen läßt (vgl. Weyl [34]).

2) Wir schreiben hierfür entsprechend der Gewohnheit der symbolischen Logik $a \in A$, d. h. » a , ein Element von A «. Diese Beziehung zwischen Menge und Individuen (zu unterscheiden von derjenigen zwischen Menge und Teilmenge) ist die Lücke unseres Inventars der Begriffe unmittelbarer Einsicht, auf die wir oben aufmerksam machten.

es werden hierbei – zwar für die Entwicklung der Theorie selbst belanglose – logische Einsichten verwirft, welche für das Verständnis des Wesens einer deduktiven Theorie von Wichtigkeit sind.

Es ist vielleicht nicht uninteressant, an dieser Stelle zu zeigen, wie die hier geschilderte allgemeine Methode der impliziten Definition die in der traditionellen Logik einzig anerkannte Art zu definieren als Spezialfall enthält. Die klassische Definition mit *genus proximum* und *differentia specifica*:

»C sollen alle B heißen, die A sind«,

können wir nämlich als implizite Definition mittels der Relation \equiv (identisch) folgendermaßen interpretieren: Der Begriff C soll so beschaffen sein, daß zu jedem Gegenstande $c \in C$ es je einen und nur einen Gegenstand $a \in A$ und $b \in B$ gibt derartig, daß die Relationen $c \equiv a$ und $c \equiv b$ bestehen. Aus solchen und nur aus solchen Gegenständen soll der Umfang des Begriffes C bestehen. Daß diese von unserm Standpunkt so spezielle Definitionsart so lange das Privileg inne hatte, erklärt sich leicht aus der Tatsache, daß sie die einzige bisher ausdrücklich anerkannte relative Beziehung zwischen Begriffen voraussetzte, die in der üblichen Logik betrachtet wurde: die Subsumptionsbeziehung des Begriffsumfanges; diese Beziehung hat ihrerseits insofern in der Tat eine bevorzugte Stellung, da sie zwischen Begriffen ausgefagt werden kann, ohne die Individuen, die unter die Begriffe fallen, zu betrachten; denn sie ist gewissermaßen eine Relation zwischen Menge und Teilmenge und bedarf daher nur der Anwendung des Zeichens \subset , nicht des Zeichens ε .

Auch in unserer Darstellung sind die ersten Definitionen, die Subsumptionsaxiome, derartig spezieller Art. Aber diese Umfangsubsumptionen definieren nicht alle Gegenstände, sondern nur ganz spezielle, nämlich gewisse rein ordinale Idealgegenstände: die Relationen. Indem wir diese vorher einführen, ist uns nunmehr erst die ganze Mannigfaltigkeit formaler Gegenstände, wie sie in einer Theorie nur vorkommen können, zugänglich. Sie werden eingeführt in den »impliziten Definitionen« unter Zugrundelegung der schon bekannten Relationen. Insofern diese impliziten Definitionen der Grundbegriffe nicht die Form einer Umfangsubsumption haben, vielmehr die Behauptung der (logischen) Existenz der betreffenden Gegenstandskategorie in sich schließt, nennen wir diese Axiome zum Unterschiede von den früher eingeführten Subsumptionsaxiomen nicht überaus treffend »Existentialaxiome«; sie greifen aus dem Umkreis der »Gegenstände überhaupt« gewissermaßen eine Anzahl von Klassen heraus und behaupten, daß zu jedem Individuum einer Klasse stets ein

oder mehrere Individuen einer anderen oder derselben Klasse in einer hierdurch umschriebenen Sphäre idealer Existenz vorhanden sind, welche eine bestimmte Relation erfüllen. Nichts Geheimnisvolleres soll das magische Wort »Existentialaxiome« charakterisieren. Es ist ein synthetisches Moment durch diese Axiome gegeben, welches die Möglichkeit schafft, neue Klassen von Gegenständen als existierend zu erkennen und zu konstruieren und hierdurch den von vornherein gegebenen Gegenstandsbereich zu erweitern.¹⁾ – Wir werden hierauf im folgenden Kapitel zu sprechen kommen und unterbrechen hier den Gedankengang, um uns zunächst einige elementare Merkmale deduktiver Theorien durch eine geeignete Bezeichnungsweise handlicher zu machen.

Drittes Kapitel.

Die Architektonik einer deduktiven Theorie.

§ 9. Der Bereich einer Gruppe von Urteilen.

Folgender Sachverhalt liegt jeder deduktiven Theorie als Ausgangspunkt vor: Gegeben ist eine Gruppe von Urteilen (sie sei in der Folge stets mit ω bezeichnet), welche das Axiomensystem der Theorie konstituiert. Das Axiomensystem ω erklärt die in ihm auftretenden Begriffe und Beziehungen – wenn auch nur relativ zueinander. Es beschreibt hierdurch, es definiert gewissermaßen, eine ideale Welt, die nur aus den Gegenständen und Sachverhalten besteht, welche durch diese Begriffe und Beziehungen entworfen werden. Diese Beschreibung begnügt sich damit, nur eine formale Struktur anzugeben, und sie kann sich daher, wie wir sehen, einzig auf rein logische und gewisse ordinale Begriffe stützen, mag sie auch den formalen Extrakt irgendeines anderen Erkenntnisgebietes, etwa einer empirischen Disziplin, sein; denn wir wissen, daß nur die relativen Eigenschaften der Grundbegriffe in die theoretischen Prozesse eingehen.

Das aus Existential- und Subsumptionsaxiomen bestehende Axiomensystem ω zieht nach sich eine (im allgemeinen nicht endliche) Menge von Begriffen, deren Gegenstände auf Grund der Existentialaxiome in der durch das Axiomensystem ω entworfenen idealen Welt zugleich mit den Grundbegriffen existieren, und eine (ebenfalls meist nicht endliche) Menge von syllogistischen Folgerungen, deren Sachverhalte in jener idealen Welt zugleich mit den axiomatisch festliegenden Beziehungen bestehen. Wir machen nun folgende terminologischen Festsetzungen:

1) Vgl. E. Becher (1) S. 29.

Ist gegeben eine Gruppe α von Urteilen¹⁾ ($p_1, p_2 \dots p_n$), so kann diese unter Umständen zu Syllogismen Anlaß geben. Wir bezeichnen die Menge der aus einer Gruppe α auf deduktivem Wege erzeugbaren Urteile als den Bereich der Gruppe α , für welche Menge wir $B(\alpha)$ schreiben. α heiße die Axiomgruppe des Bereiches $B(\alpha)$, und es soll festgesetzt werden, daß die Urteile von α zum Bereiche $B(\alpha)$ zu zählen sind. Diese Festsetzung wird ihre Zweckmäßigkeit erst später erweisen. Ein Bereich, als Gruppe von Urteilen aufgefaßt, kann ersichtlich nicht zu Syllogismen führen, deren Resultate nicht schon im Bereich enthalten sind; denn die Deduktion einer Deduktion ist selbst wieder eine Deduktion und als solche schon im ursprünglichen Bereich enthalten. Ein Bereich ist also eine Gruppe von Urteilen, die eine ganz charakteristische Geschlossenheit besitzt; er kann aus sich heraus nicht erweitert werden; es ist vielmehr in unserer Schreibweise $B(B[\alpha]) \equiv B(\alpha)$.

Nicht jede willkürliche Gruppe von Urteilen besitzt einen bestimmten (definierten) Bereich.²⁾ Damit ein Bereich definiert sei, fordern wir, daß von jedem aus den Grundbegriffen des Axiomsystems beliebig zu bildenden Urteil entschieden ist, ob es eine deduktive Folge der Gruppe ist, also dem Bereiche angehört, oder nicht. Es kann sein, daß sich ein Urteil aufweisen läßt, welches sowohl selbst, wie auch sein kontradiktorisches Gegenteil aus der Gruppe gefolgert werden kann; dann gilt die Menge der deduktiven Folgerungen, der Bereich also der Gruppe, als »nicht definiert«. Eine Gruppe, welche keinen definierten Bereich besitzt, heißt »in sich widerspruchsvoll«. Man ist im allgemeinen nicht imstande, die Widerspruchsfähigkeit einer Gruppe von Urteilen a priori zu erkennen, sofern nicht der zugehörige Bereich endlich ist; denn wir können stets nur endlich viele Folgerungen auf ihre Verträglichkeit hin prüfen und haben nie das Recht, unter den noch nicht gezogenen Folgerungen keine sich widersprechenden Urteile zu mutmaßen. Nur das negative »widerspruchsvoll zu sein« ist eine in jedem Falle definite Eigenschaft. Es kann also kein allgemeines Kriterium für die Widerspruchsfähigkeit geben. — Etwas anderes aber läßt sich, wie es scheint, stets beweisen: nämlich die relative

1) Wir bezeichnen mit $P, Q \dots$ Klassen von Gegenständen (Umfänge von Begriffen); mit $p, q, r \dots$ Urteile; mit $\{p\}$ den Umfang des Sachverhaltes des Urteils p (vgl. § 7); mit $\alpha, \beta \dots$ Gruppen von Urteilen; speziell mit ω Axiomsysteme von Theorien, mit $\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \dots$ Relationen.

2) Vgl. Cantors etwas engere Definition der »wohldefinierten Menge«, math. Ann. XX, S. 119 ff.

Widerspruchslosigkeit einer Gruppe, bezogen auf die einer anderen Gruppe, indem man zeigt, daß letztere einen Widerspruch enthalten müßte, falls erstere je auf einen solchen führen sollte; und es ist gewiß merkwürdig und einer Begründung bedürftig, daß es, wie es scheint, stets möglich ist, die Widerspruchslosigkeit auf die einer und derselben Gruppe zu stützen, nämlich die der Arithmetik, so daß es also scheinbar gewissermaßen nur einen einzigen Bereich widerspruchsloser Formalwahrheit gibt.¹⁾ – Wir werden auf diese noch sehr verschwommenen Andeutungen später von einem wesentlich allgemeineren Gesichtspunkt aus einzugehen haben. Jedoch wollen wir schon an dieser Stelle auf den hier auftretenden Gegensatz zwischen absoluten Unmöglichkeiten und relativen Möglichkeiten der Bestimmbarkeit einer formalen Aussage hinweisen, der sich durch das ganze zu behandelnde Gebiet zieht und bei allen entscheidenden Fragen immer wieder zum Vorschein kommen wird. –

§ 10. Relativ analytische und synthetische Urteile.

Eine deduktive Mannigfaltigkeit ist eine relative Verknüpfungseinheit von Wahrheit. Um deren nähere Struktur zu erkennen, wird uns eine begriffliche Unterscheidung zweier Urteilstypen ein wichtiges Hilfsmittel sein. Wir knüpfen hierbei an die § 6 auseinandergelegten Begriffe des »Umfangs eines Urteils«, der Menge der von dem Urteil gemeinten Sachverhalte, und des »Umfangs einer Urteilsgruppe«, welche den Umfang des logischen Produktes der einzelnen Urteile darstellt, an.

Ist ω das Axiomensystem einer deduktiven Theorie, so können wir alle Urteile, die es überhaupt gibt, klassifizieren, je nach der Beziehung, die ihr Umfang zum Umfang von ω hat. Wir definieren:

1. Ein Urteil heiße »analytisch zu ω «, wenn der Umfang von ω Teilmenge des Umfanges des Urteils ist.

2. Ein Urteil heiße »synthetisch zu ω «, wenn mindestens eine Teilmenge seines Umfanges echte Teilmenge des Umfanges von ω ist.

3. Die übrigen Urteile (deren Umfang mit dem von ω kein Element gemeinsam hat) spielen für uns keine Rolle; ihre kontradiktorischen Urteile sind zu ω analytisch, während diejenigen Urteile, deren kontradiktorischen Urteile zu ω synthetisch sind, selbst zu ω synthetische Urteile sind.

Wir bemerken, daß unsere 3-Teilung sachlich stets entschieden ist; ein Urteil kann nur einer der 3 Klassen angehören. Damit ist

1) Für diesen fundamentalen Bereich scheint inzwischen D. Hilbert die Widerspruchslosigkeit bewiesen zu haben. (Mitteil. d. mathem. Ges. Hamburg 1921, sowie P. Bernays, Jahresber. d. deutsch. Mathematiker-Vereinigung 1922.)

natürlich nicht behauptet, daß diese Entscheidung empirisch immer möglich ist.

Ein zu ω analytisches Urteil ist also überall dann wahr, wenn ω wahr ist, es hat zu seiner Wahrheit hinreichende Begründung in der Wahrheit von ω , es ist eine logische Folge des Axiomsystems ω und gehört dem Bereiche $B(\omega)$ an.

Die Wahrheit der zu ω synthetischen Urteile hat keinen hinreichenden Grund in der Wahrheit von ω ; sie »erfordern noch ein anderes Prinzip (als das des Widerspruches), ob sie zwar aus jedem Grundsatz, welcher es auch sei, dem Satze des Widerspruches gemäß abgeleitet werden müssen«. ¹⁾ Aus der Wahrheit von ω folgt zwar nicht die Notwendigkeit, wohl aber die (formale) Möglichkeit eines zu ω synthetischen Urteils. Das andere Prinzip, aus welchem erst die Notwendigkeit eines synthetischen Urteils entspringt, ist bei Kant für die synthetischen Urteile a posteriori die Erfahrung, für die synthetischen Urteile a priori die Prinzipien der reinen Erkenntnis.

§ 11. Bei der Aufstellung einer Theorie im formalistischen Sinne, wie wir ihn skizzierten, steht keine dieser Erkenntnisquellen zur Begründung des synthetischen Urteils zur Verfügung. Uns genügt es zu wissen, daß der Umfang des betreffenden Urteils p jedenfalls in den Umfang von ω hineinragt, ²⁾ m. a. W. daß der Umfang des logischen Produktes von ω und p nicht leer ist. Nun ist es möglich, daß ein logischer Grund aus den Axiomen der Theorie sich herleiten läßt, daß mehrere so gebildete Umfänge in Subsumptionsbeziehung zu einander stehen müssen; daß also wenn das eine Urteil wahr ist, zugleich auch stets das andere wahr ist — ohne daß wir zu wissen brauchen, daß es wirklich wahr ist. Eine derartige Aussage über die Koinzidenz der Wahrheiten zweier synthetischer Urteile ist ein zu ω analytisches Urteil; es hat als Subjekt und Prädikat synthetische Urteile, oder richtiger: Umfänge von synthetischen Urteilen.

In den physikalischen Theorien sind die zum Axiomsystem analytischen Urteile die allgemeinen Theoreme, synthetisch dagegen die Randwertauslagen, die nicht aus der Theorie heraus sondern durch ein anderes Prinzip, nämlich die Erfahrung, begründet werden, aber

1) Prolegomena (15) S. 25. Man erkennt hieran die Parallele zu der Kantischen Klassifikation, an die wir durch unsere Terminologie anspielen. Es ist wohl überflüssig auseinanderzusetzen, daß wir durch unsere Darstellung keine Kritik oder Berichtigung der Kantischen Unterscheidung anstreben. Was im Gebiete der Erkenntnistheorie absolut ist, zerfällt in der formal-logischen Sphäre in relative Beziehungen.

2) Der Beweis hierfür wird geführt durch Ableitung eines Existentialurteils aus den Existentialaxiomen von ω .

diese Begründung durch Erfahrung muß notwendig im Einklang mit den theoretischen Möglichkeiten stehen. Die allgemeinen Theoreme der Physik können nun aber ihrerseits notwendige Verknüpfungen zwischen den Randwertausagen herleiten, ohne die Wahrheit der Randwerte selbst zu begründen. Daher ist es für den Aufbau der theoretischen Physik nach Aufstellung der allgemeinen Grundgesetze aus der Erfahrung im Axiomensystem, weiterhin bei der Ableitung keine Erfahrung zur Feststellung der Wahrheit der Randwerte notwendig, denn die abgeleiteten Sätze stellen relative Verknüpfungen zwischen möglichen Randwerten dar. Nur bei der Anwendung auf spezielle Probleme ist durch die Erfahrung die Begründung auch der Wahrheit der synthetischen Urteile erforderlich.

In der Mathematik ist uns diese Form des Urteils (von der klassischen Logik »hypothetisches Urteil« genannt) am geläufigsten.¹⁾ Der mathematische Lehrsatz ist ein zum Axiomensystem der betreffenden mathematischen Disziplin analytisches Urteil, welches als Subjekt und Prädikat Umfänge von synthetischen Urteilen besitzt. Für das Subjekt gebraucht man die Bezeichnung »Voraussetzung« oder auch »Bedingung«; es hat stets die sprachliche Gestalt: »Es sei . . .«. Das Prädikat von der Form: »Dann ist . . .« heißt »Behauptung«. Die Voraussetzung heißt insbesondere »hinreichend«, wenn ihr Umfang den Umfang der Behauptung als Teil enthält. Im umgekehrten Falle, wenn der Umfang der Voraussetzung Teil des Umfangs der Behauptung ist, heißt die Voraussetzung nur »notwendig«.

Wir glauben, durch diese Auffassung des hypothetischen Urteils uns dem schlichten Sinn desselben am sachgemäßeften anzupassen. Strenggenommen ist die übliche Lehre²⁾ vom hypothetischen Urteile als »Inbegriff mehrerer Urteile« als irrtümlich anzusehen; denn innerhalb der hypothetischen Urteile sind die beiden Bestandteile keine Urteile, sondern einzig Begriffe. Ein Urteil nämlich befaßt nicht nur eine Beziehung, sondern zugleich auch das Bestehen dieser Beziehung; denn es beansprucht eine Begründung und behauptet eine Wahrheit. Das ist wohl zu unterscheiden. Eine Beziehung als solche bedarf zu ihrer Bezeichnung keines Urteils, sondern eines Begriffes, denn sie ist keine Wahrheit, sondern ein Gegenstand.³⁾ Somit ist das, was wir bisher in laxem Sprachgebrauch ein »synthetisches Urteil« nannten, überhaupt noch kein Urteil, sondern ein Begriff

1) Russell benutzte diesen Umstand umgekehrt zu einer Definition der Mathematik ([31] S. 1).

2) Siehe Erdmann l. c. S. 560.

3) Vgl. M. Schlick l. c. S. 39.

(Meinong gebraucht das indifferente Wort »Annahme«); denn wir meinen nicht das Bestehen der Synthesis, sondern diese letztere selbst. Erst das zusammenfassende hypothetische Urteil sagt etwas über das Bestehen aus, nämlich etwa, daß das Bestehen zweier Synthesen koinzidiert. Darum aber sind die sachartigen Bestandteile des hypothetischen Urteils ihrerseits keine Urteile, denn sie sagen selbständig kein Bestehen, sondern nur ein Beziehen aus, das bestehen kann. Trotzdem behalten wir bisweilen noch die Bezeichnung synthetisches »Urteil« (synonym von jetzt ab mit »Synthese«) bei, die hiernach inkonsequent ist, und zwar aus folgendem Grunde: In der Theorie können Synthesen in der Tat die formalen Eigenschaften eines Urteils zeigen, sie sind den Gesetzen der Syllogistik unterworfen, indem hierbei die Begründung der Synthesen gewissermaßen antizipiert wird. In dieser Zwitterstellung der Synthese werden wir später ein wichtiges Instrument erkennen, um das Verständnis in den Mechanismus des deduktiven Systems zu gewinnen. Es ist ein für das theoretische Denken charakteristischer Prozeß, den Sachverhalt eines Urteils selbst wieder als Gegenstand anzusehen und so zu immer höheren Idealgebilden aufzusteigen; dieser Vorgang heißt die Nominaldefinition des Gegenstandes. In der Geometrie ist es uns geläufig, derartige Synthesen als Gegenstände anzusehen; denn wir denken an die anschauliche Figur, welche das mögliche Erfülltein des synthetischen Urteils »vergegenständlicht«. In den anderen Theorien sind es wesentlich abstraktere Gegenstände, in der theoretischen Physik sind diese Synthesen z. B. Zustände materieller Systeme, in der Analysis funktionale Abhängigkeiten usw. — Es ist daher die historische Tatsache kein bloßer Zufall, daß diese Disziplinen, in denen der Gegenstandssetzung des Sachverhaltes der Synthesen kein so anschauliches Moment wie die geometrische Figur zu Hilfe kommt, eine theoretische Gestaltung ungleich viel später gewannen als die Geometrie, welche noch bis zu Spinoza als Prototyp aller theoretischen Wissenschaft galt.

Wir werden später, indem wir an diese Betrachtungen wieder anknüpfen (Kapitel V), erst in der Lage sein, präzise zu erkennen, welche Bedeutung die Gegenstandssetzung des Sachverhaltes synthetischer Urteile für den Aufbau einer deduktiven Theorie besitzt, daß in ihr zum Teil der Grund jenes nie verstandenen Rätsels zu finden ist, daß durch syllogistische Prozesse nicht nur Trivialitäten, sondern tatsächlich neue Erkenntnisse gewonnen werden können, und brechen hier den Gedankengang ab, der uns zu einer ersten Übersicht über die wesentlichsten Konstruktionselemente einer jeden deduktiven Theorie führte.

Viertes Kapitel.

Das Problem der Metrik in einer deduktiven Mannigfaltigkeit.

§ 12. Die Potenz einer Gruppe von Urteilen.

Wir bezeichneten früher als den Bereich $B(\alpha)$ einer Gruppe α von Urteilen die (endliche oder unendliche) Menge von Urteilen, die durch rein deduktive Prozesse aus α gefolgert werden kann. Zwei Gruppen α und β von Urteilen seien »äquipotent« genannt, wenn die ihnen zugehörigen Bereiche identisch sind. Die Äquipotenz ist also (wegen der Transitivität der Identitätsbezeichnung) selbst eine transitive Relation: Ist α und β equipotent, β und γ equipotent, so ist auch α und γ equipotent. Es ist also die Menge der zu einer Urteilsgruppe α equipotenten Urteilsgruppen eine wohldefinierte Menge. Diese Menge definiert ihrerseits eine Eigenschaft durch ihren Umfang, welche allen in dieser Menge vorkommenden (äquipotenten) Urteilsgruppen gemeinsam ist und nur diesen zukommt. Diese wohldefinierte gemeinsame Eigenschaft¹⁾ heiße »Potenz«. Die Potenz ist eine Funktion der Urteilsgruppe α ; wir benutzen für sie als Funktionszeichen den Buchstaben Π . Es ist also $\Pi(\alpha) = \Pi(\beta)$ dann und nur dann, wenn $B(\alpha) \equiv B(\beta)$ ist. Es gibt ebensoviele Potenzen wie nicht identische Bereiche.

Ist der Bereich einer Gruppe α identisch mit einem echten Teil des Bereiches einer anderen Gruppe β , ist also (vgl. § 6): $B(\alpha) \subset B(\beta)$, so sagen wir: » α hat eine kleinere Potenz als β « und schreiben $\Pi(\alpha) < \Pi(\beta)$. Aus der Definition der Potenz lassen sich ohne weiteres folgende einfachen Beziehungen ableiten:

Ist $\Pi(\alpha) = \Pi(\beta)$ und $\Pi(\beta) = \Pi(\gamma)$, so ist $\Pi(\alpha) = \Pi(\gamma)$.

Ist $\Pi(\alpha) \leq \Pi(\beta)$ und $\Pi(\beta) < \Pi(\gamma)$, so ist $\Pi(\alpha) < \Pi(\gamma)$.

$\Pi(\alpha) = \Pi(B[\alpha])$. Beweis: es ist $B(\alpha) \equiv B(B[\alpha])$.

Ist α eine Folge von β , also $\alpha \subseteq B(\beta)$, so ist

$\Pi(\alpha) \leq \Pi(B[\beta]) = \Pi(\beta)$ also $\Pi(\alpha) \leq \Pi(\beta)$.

Durch die Potenz ist in keinerlei Weise einer jeden Gruppe von Urteilen eindeutig eine bestimmte absolute Größe, etwa eine Zahl zugeordnet. Vielmehr sind wir einzig berechtigt, wenn ein Bereich einen anderen völlig umfaßt, von der rein ordinalen relativen Eigenschaft zu reden: die eine Gruppe habe gleiche, größere oder kleinere Potenz als die andere. — Trotzdem ist damit die Frage noch nicht

1) Eine exakte Darstellung des bei dieser Definition vollzogenen Prozesses, den Russell als »Principle of Abstraction« bezeichnet, findet sich (31) S. 219 f. — vgl. auch Burali-Forti l. c.

abschließend im negativen Sinne entschieden, ob nicht im Wesen der formalen Theorie Möglichkeiten enthalten sind, eine exakte quantitative Aussage durch eine verallgemeinerte Fassung des Potenzbegriffes zu begründen.

§ 13. Häufig wird selbst die relative Entscheidung, welche von zwei Urteilsgruppen größere Potenz habe, nicht möglich sein; denn es kann durchaus der Fall eintreten, daß keiner der beiden Bereiche im anderen vollständig enthalten ist, daß höchstens also Teilmengen identisch sind. Solche Gruppen nennen wir »unvergleichbar«. Ist insbesondere nicht einmal eine Teilmenge beiden Bereichen gemeinsam, so sind die zugehörigen Urteilsgruppen »von einander unabhängig«. Es kann dann keines der Urteile des einen Bereiches aus der Gruppe des anderen Bereiches deduziert werden. Zwischen den Potenzen von zwei unvergleichbaren (also auch insbesondere unabhängigen) Gruppen ist eine Beziehung nicht definiert.

Ist eine Gruppe α so beschaffen, daß keines der Urteile im Bereiche der übrigen Urteile der Gruppe α sich befindet, so heißt die Gruppe »irreduzibel«. Wir können auch die scheinbar etwas schärfere Forderung stellen, daß alle in einer irreduziblen Gruppe enthaltenen elementefremden Teilgruppen unabhängig sein sollen. Man erkennt leicht, daß beide Definitionen gleichwertig (äquipotent!) sind. —

Zunächst erscheinen diese neuen Begriffe der Unabhängigkeit, resp. der Irreduzibilität sehr problematisch, und die zweifelnde Frage ist naheliegend, ob man je von einer Gruppe wissen könne, daß sie irreduzibel sei, da man immer in den noch nicht betrachteten (unendlich vielen) Deduktionen diejenigen vermuten könnte, welche ein Urteil der fraglichen Gruppe allein mit Hilfe der übrigen beweist. Aber dieser Einwand, welcher an den früher erwähnten gegen die Beweisbarkeit der Widerspruchsfreiheit erinnert, ist hier nicht berechtigt. Denn hier existiert tatsächlich ein Beweisverfahren, welches auf folgendem einfachen Gedankengang¹⁾ beruht: Man zeigt, daß das kontradiktorische Gegenteil des Urteils, dessen Unabhängigkeit zu beweisen ist, zusammen mit den übrigen Urteilen der Gruppe bei geeigneter inhaltlicher Interpretation der ja nur relativ zu einander bestimmten Begriffe ein Formalobjekt beschreibt, dessen logische Möglichkeit bereits erwiesen ist, welches letzteres man dadurch festzustellen pflegt, daß man als jenes Formalobjekt einen passenden Teil der ursprünglichen Theorie interpretiert. Ein Urteil aber, dessen Verneinung zugleich mit den übrigen Urteilen bestehen kann, ist

1) Vgl. Padoa l. c. S. 309.

unmöglich aus diesen deduzierbar. Wir bemerken jedoch, daß stillschweigend hier Gebrauch von der logischen Widerspruchsfreiheit gemacht wird, welche ihrerseits im absoluten Sinne nicht allgemein bewiesen werden kann, so daß jede Aussage über logische Unabhängigkeit insofern ebenfalls nur relativ zu beweisen ist. Das hier geschilderte Beweisverfahren hat seine klassische Anwendung vor allem beim Nachweis der Unabhängigkeit des euklidischen Parallelenaxioms zur Begründung der nichteuklidischen Geometrien in den Untersuchungen von Felix Klein gefunden.

§ 14. Verallgemeinerung des Potenzbegriffes.

Durch den Begriff der Potenz wird eine anschaulich sehr naheliegende Vorstellung in exaktere Form gebracht, nämlich die Vorstellung der Tatsache, daß ein Urteilskomplex »mehr aussagt«, »inhaltsreicher ist« als ein anderer. Aber wir haben diese Aufgabe bisher in sehr wenig befriedigender Weise gelöst, indem wir zwar eine exakte Definition besitzen, welche jedoch zu eng ist, um eine große Zahl von Fällen zu umfassen, für welche schon anschaulich eine Entscheidung ohne weiteres besteht. Es hat natürlich einen Grund, daß unsere Definition der intuitiven Einsicht derartig nachhinkt; denn letztere vollzieht eine große Anzahl von Prozessen, ohne ihrer im einzelnen inne zu werden, mit großer Sicherheit, da sie sofort das Sinnvolle, was sie zu leisten hat, wahrnimmt. Im Gegensatz hiermit muß die exakte Methode jeden einzelnen Schritt berücksichtigen, denn sie geht, ohne auf den Sinn des Inhalts zu achten, rein formal konstruktiv ihrem Ziele entgegen. Wir können also hoffen, indem wir den Begriff der Potenz verallgemeinern und dem, was wir uns offenkundig von vornherein anschaulich unter ihm vorgestellt haben, durch exakte nähere Bestimmungen zu approximieren suchen, eine Einsicht in nicht so ganz an der Oberfläche liegende logische Gesetzmäßigkeiten zu gewinnen.

Es wäre vor allem wertvoll, den Begriff der Potenz auch auf einzelne Urteile anwenden zu können. Aber hier stoßen wir sofort auf eine Schwierigkeit: Ein einzelnes Urteil p gibt im allgemeinen keinen Anlaß zu syllogistischen Prozessen¹⁾; es ist gewissermaßen das einzige Urteil seines Bereiches, es ist $B(p) \equiv p$. Unsere bisherige Definition der Potenz läßt uns im Stiche; denn wir haben hier den Fall vor uns, den wir oben bei den Urteilsgruppen schon antrafen,

1) Über die sogenannten »unmittelbaren Schlüsse« aus einer einzigen Prämisse vgl. § 16, 17.

daß zwei Bereiche höchstens Teilmengen gemeinsam haben und es also nicht definiert ist, welcher die größere Potenz besitzt. Damals haben wir uns gezwungen, sie zunächst als »unvergleichbar« von unseren Betrachtungen bis auf weiteres auszuschließen. Trotzdem widerstrebt es uns offenkundig, zwei Sätze, wie etwa in der Mechanik das Prinzip von Hamilton und das von Gauß, als unvergleichbar zu betrachten, denn man kann sowohl das eine wie das andere, vereint mit den kinematischen Prinzipien, in gleicher Weise zur Grundlage der gesamten Mechanik machen. Es muß sich also offenbar eine Verfeinerung unserer bisherigen Definition der Potenz finden lassen, die diesem anschaulich so auf der Hand liegenden Sachverhalt geeignet zum Ausdruck verhilft. —

Es läge nun zunächst wohl nahe, wie es das angeführte Beispiel schon andeutet, unsere früheren Vereinbarungen etwa durch folgende plausible Ergänzung zu verallgemeinern: »Sind α und β zwei unvergleichbare Gruppen (die insbesondere auch nur aus einem einzigen Urteil bestehen können), so sei $\Pi(\alpha) < \Pi(\beta)$, wenn eine Gruppe γ existiert¹⁾, der Art, daß $B(\alpha + \gamma) \subset B(\beta + \gamma)$ ist.²⁾ Entsprechend folge aus $B(\alpha + \gamma) \equiv B(\beta + \gamma)$, daß α und β äquipotent sind.

Dieser Definition haften nun recht bedeutende Mängel an, welche eine Kritik unumgänglich machen. Da diese Kritik, welche uns schließlich zu einer in der Tat brauchbaren, verallgemeinerten Fassung des Potenzbegriffes verhelfen wird, zugleich dazu befähigt ist, eine wesentliche Vertiefung unserer Einsicht in die hier in Frage kommenden Zusammenhänge der deduktiven Theorie herbeizuführen, wird es nicht überflüssig sein, auf diese Kritik etwas näher einzugehen. —

Es wäre zunächst unter allen Umständen zu fordern, daß obige Definition stets eindeutig ist; prinzipiell ist aber in keiner Weise sichergestellt, daß jedes γ die gleiche Relation zwischen zwei bestimmten Gruppen α und β herstellt, wenn γ nur insofern einer Einschränkung unterliegt, als es mit α und β vergleichbare Bereiche erzeugen muß. Es ist vielmehr durchaus nicht ausgeschlossen, daß zwei Gruppen γ und γ' existieren, derartig daß zugleich

$$\begin{aligned}\Pi(\beta + \gamma) &< \Pi(\alpha + \gamma) \\ \Pi(\alpha + \gamma') &< \Pi(\beta + \gamma')\end{aligned}$$

ist. In der Tat läßt sich zunächst eine typische Reihe von Fällen hervor-

1) Diese Hilfsgruppe γ bilden im obigen Beispiel die kinematischen Prinzipien, mit deren Hilfe der Übergang vom Gaußschen zum Hamiltonschen Prinzip und umgekehrt vollzogen werden kann.

2) $\alpha + \beta$ ist diejenige Gruppe von Urteilen, die aus allen Urteilen besteht, die entweder α oder β oder beiden zugleich angehören.

heben, in denen dieser Sachverhalt eintritt. Betrachten wir folgendes einfache Beispiel: Es seien folgende zwei Gruppen α und β von je zwei Subsumptionsurteilen gegeben:

$$\alpha: [A \subset B; C \subset D]$$

$$\beta: [A \subset C; B \subset D]$$

Die beiden Gruppen sind unvergleichbar mit einander; wir erweitern sie durch folgende Gruppe

$$\gamma: [B \subset C] \text{ zu vergleichbaren Bereichen; es ist nämlich:}$$

$$B(\alpha + \gamma): [A \subset B; B \subset C; C \subset D; A \subset C; B \subset D; A \subset D]$$

$$B(\beta + \gamma): [A \subset C; B \subset C; C \subset D; A \subset C; B \subset D; A \subset D]$$

Es ist also $B(\beta + \gamma) \subset B(\alpha + \gamma)$ und nach unserer Definition wäre:

$$\Pi(\beta) < \Pi(\alpha).$$

Wählen wir dagegen als Hilfsgruppe

$$\gamma': [C \subset B], \text{ so ist}$$

$$B(\alpha + \gamma'): [C \subset B; A \subset B; C \subset D; A \subset C; B \subset D; A \subset D]$$

$$B(\beta + \gamma'): [C \subset B; A \subset C; B \subset D; A \subset B; C \subset D; A \subset D]$$

Es ist also $B(\alpha + \gamma') \subset B(\beta + \gamma')$, und es wäre, im Widerspruch zu oben, zu folgern:

$$\Pi(\alpha) < \Pi(\beta).$$

§ 15. Die Konsequenz, die wir aus diesem paradoxen Sachverhalt zu ziehen haben, kann offenbar nur die sein, daß es eben sinnlos ist, ohne nähere Angabe einem von zwei Urteilen größere Potenz zuerteilen zu wollen. Nun erkennen wir unmittelbar, daß das widerspruchsvolle Resultat dadurch zustande kam, daß γ und γ' nicht zugleich wahr sein können, da das eine Urteil das kontradiktorische Gegenteil des anderen ist; wenn B ein echter Teil von C ist (γ), kann nicht zugleich auch C ein echter Teil von B sein (γ'). Wir sehen also, daß jedenfalls die Hilfsgruppen γ , mit welchen wir die zu vergleichenden Gruppen zusammenfassen, nicht völlig willkürlich sein dürfen, sondern untereinander einen Bereich widerspruchsfreier Wahrheit darstellen müssen. Eine derartige relative Verknüpfungseinheit von Wahrheit ist aber nichts anderes als eine deduktive Mannigfaltigkeit. Wenn also überhaupt eine Definition einer Potenzbeziehung zwischen unabhängigen Gruppen oder Einzelurteilen möglich sein sollte, so kann sie jedenfalls nur als Relativbegriff zu einer bestimmten Theorie dargestellt werden. Es ist offenbar nicht im mindesten paradox, daß irgendein Urteil q größere Potenz als ein anderes p etwa im Rahmen einer atomistischen Theorie der Physik, dagegen kleinere, wenn wir sie im Zusammenhang einer Theorie betrachten, welche die physikalischen Erscheinungen auf gewisse kontinuierliche Prinzipien zurück-

führt.¹⁾ Durch die Einführung der Quantentheorie ist in der Tat vielerorts diese Umwendung der Potenzbeziehung hervorgerufen worden.

Wir haben in weiterem Sinne infolgedessen die Potenz als eine relative Größe aufzufassen: galt sie bisher uns als relativ, weil sie nur gestattete, Urteilsgruppen eine bestimmte Ordnung zu erteilen, ohne ihnen damit eine absolute Fixierung (etwa durch eine quantitative Angabe) zu verleihen, so erkennen wir jetzt, daß der Richtungs-sinn dieser Ordnung selbst seinerseits noch abhängig ist von dem Wahrheitsbereich, den wir als geltend im Axiomensystem anerkennen. Insofern erscheint hierdurch der Wahl der Hilfsgruppe γ eine wesentliche Einschränkung auferlegt, und dahin ist unsere Definition im Text zu berichtigen: Zwei von einander unabhängige Gruppen (insbesondere Einzelurteile) besitzen absolut genommen, d. h. ohne Einordnung in eine deduktive Theorie, noch keine Potenzbeziehung. Zwischen: »Alle Menschen sind sterblich« und »Alle Dreiecke haben eine Winkelsumme von 180° « läßt sich ohne Angabe des Zusammenhangs nicht entscheiden, welches von beiden Urteilen das inhaltsreichere ist. Im allgemeinen wird es einem wohl schwerlich danach verlangen, derartig geistreiche Fragen zu stellen.

Wir definieren also die Potenz von einander unabhängiger Gruppen (Einzelurteile) stets relativ zu einem vorher vereinbarten Wahrheitsbereiche, einer bestimmten Theorie also, aus welcher die Hilfsgruppe γ herauszugreifen ist. Vergleichen wir zwei unabhängige Theorien, so bedarf es der Auffindung einer umfassenderen Theorie, innerhalb welcher die einzelnen Theorien sich zu vergleichbaren Bereichen erweitern lassen. Eine solche umfassende Theorie wird sich nicht immer auffinden lassen. Die spezielle Relativitätstheorie ist eines dieser seltenen Beispiele; sie hat es direkt möglich gemacht, gewisse elektrodynamische Theoreme mit mechanischen Prinzipien betreffs ihres Aussagegehaltes zu vergleichen; und das so aktuelle Problem, ob eine elektrodynamische Grundlegung des physikalischen Geschehens an Stelle der mechanischen möglich ist, bedeutet im Grunde nichts anderes als die Frage, welche der beiden Theorien größere Potenz besitzt. —

Durch die Einschränkung auf einen bestimmten Bereich relativ verknüpfter Wahrheit, die wir der Wahl von γ auferlegen, erfüllen wir jedenfalls eine als notwendig erkannte Vorbedingung dafür, daß die so definierte Beziehung zwischen den Potenzen zweier unabhängigen Gruppen eindeutig bestimmt sei. Ob hiermit auch den hin-

1) H. Herz bringt in seiner Mechanik (10) auf S. 175 ein solches Beispiel.

reichenden Voraussetzungen für die Eindeutigkeit genügt wird, ist durch das Gefagte noch in keiner Weise begründet. Anschaulich scheint allerdings die Definition unseres Begriffes nunmehr einwandfrei zu sein, aber es bedarf dies jedenfalls des Beweises. Ein solcher müßte, indirekt vorgehend, offenbar zeigen, daß innerhalb eines Wahrheitsbereiches die Annahme eines γ' mit der Eigenschaft

$$II(\alpha + \gamma') < II(\beta + \gamma'), \text{ während } II(\beta + \gamma) < II(\alpha + \gamma) \text{ ist,}^{1)}$$

zu Folgerungen führt, die gemäß des Satzes vom Widerspruch nicht möglich sind. Dieser Beweis ließ sich trotz eingehender Versuche aus den gemachten Voraussetzungen nicht erbringen. Jedenfalls nicht, wenn auch unendliche Bereiche, wie wir es stets taten, betrachtet werden. Es ist prinzipiell nicht die Vermutung von der Hand zu weisen, daß zur Herleitung dieses Beweises gewisse Prämissen benötigt werden, die wir bisher noch nicht vorgefunden haben, welche vielleicht speziell der Theorie der deduktiven Mannigfaltigkeiten eigen sind und sie gegenüber der logischen Elementarlehre auszeichnen. Das wäre jedenfalls sehr interessant, nur ein wenig phantastisch. Es wäre zumindest sehr verwunderlich, kraft welcher Erkenntnisquelle wir zu diesem mysteriösen Prinzip gelangen sollten. Wir ziehen es vor anzunehmen, daß der Satz in dieser Form auch jetzt noch falsch ist, oder genauer: wir wollen einen Weg beschreiten, der gangbar bleibt, unabhängig davon, ob der fragwürdige Eindeutigkeitssatz gilt oder nicht; und dieser Weg dürfte auch sachlich nicht ganz ungerechtfertigt erscheinen. Vergewärtigen wir uns nämlich, daß die Bereiche nichts sind, als im allgemeinen unendliche Mengen von Urteilen. Es ist nun eine bekannte Tatsache der Mengenlehre, daß für zwei äquivalente transfinite Mengen Zuordnungen bestehen derart, daß die eine Menge eindeutig auf einen echten Teil der anderen Menge elementweise bezogen ist. Es zeigt sich in der Tat²⁾, daß dieser paradox erscheinende Sachverhalt wahrscheinlich der Grund ist für die Schwierigkeiten, die sich uns bei der Auffindung des Beweises in den Weg stellten; und es liegt nahe, denselben Gedanken zu ergreifen, welchen weiterhin auch die Mengenlehre zur Anwendung bringt, um ihrerseits zu ihrer Definition der Mächtigkeiten zu gelangen.

Wir definieren nämlich nunmehr endgültig: Ist gegeben eine widerspruchsfreie Gruppe ω von Urteilen, die durch $B(\omega)$ eine relative Verknüpfungseinheit von Wahrheit definiert, sind weiterhin ge-

1) $\alpha, \beta, \gamma, \gamma'$ mögen dem Bereiche einer Theorie angehören, deren Axiomensystem ω sei, dann ist $B(\alpha) \subset B(\omega)$, $B(\beta) \subset B(\omega)$ usw.

2) Vgl. den Anhang.

geben eine Gruppe α und eine mit α nicht vergleichbare¹⁾ Gruppe β , die beide im Bereiche $B(\omega)$ enthalten sind, ist schließlich γ eine willkürliche Gruppe aus $B(\omega)$ mit der Eigenschaft:

(1.) $B(\alpha + \gamma) \subset B(\beta + \gamma)$, so soll dadurch $\Pi(\beta) < \Pi(\alpha)$ ausgeschlossen sein, also die Disjunktion $\Pi(\alpha) \leq \Pi(\beta)$ »relativ zu ω « bestehen. Existiert nun beispielsweise gleichzeitig ein γ' in $B(\omega)$ derart, daß $B(\beta + \gamma') \subset B(\alpha + \gamma')$ ist, so wird $\Pi(\alpha) < \Pi(\beta)$ ausgeschlossen und es folgt zusammen mit obiger Angabe, daß notwendig dann $\Pi(\alpha) = \Pi(\beta)$ sein muß. Man erkennt, daß weiterhin noch folgende Festsetzungen zu treffen sind, um die Definition vollständig zu machen:

(2.) Ist $B(\alpha + \gamma) \equiv B(\beta + \gamma)$ für alle Urteilsgruppen γ , die mit α und β vergleichbare Bereiche erzeugen, und ist weiterhin nicht für alle diese γ

$$B(\alpha + \gamma) \equiv B(\beta + \gamma) \equiv B(\omega),$$

so sei dies eine hinreichende (nicht notwendige) Bedingung dafür, daß $\Pi(\alpha) = \Pi(\beta)$ ist.

(3.) Ist aber $B(\alpha + \gamma) \equiv B(\beta + \gamma) \equiv B(\omega)$ für alle γ , die in Frage kommen, so sind α und β voneinander »relativ zu ω unabhängig« zu nennen. Zu (1.) ist noch zu bemerken, daß $\Pi(\alpha) < \Pi(\beta)$ aus der Disjunktion $\Pi(\alpha) \leq \Pi(\beta)$, die allein aus $B(\alpha + \gamma) \subset B(\beta + \gamma)$ folgt, durch einen Unabhängigkeitsbeweis (§ 13) gewonnen wird, welcher die Möglichkeit $\Pi(\alpha) = \Pi(\beta)$ ausschließt. —

Hiermit haben wir eine Definition der Potenz als Relativbegriff gewonnen, die gerade das liefert, was wir von ihr verlangten, und die sicher immer eindeutig ist. Darum begnügen wir uns hier zunächst mit dieser Fassung, die weit davon entfernt ist, formal in jeder Hinsicht zu befriedigen. Wir wollen uns hier nicht weiter bei diesem Gegenstande aufhalten, da wir die Theorie der allgemeinen deduktiven Mannigfaltigkeiten nur um gewisser Spezialresultate willen näher betrachteten, welche zur Einsicht in die Architektur der vorhandenen theoretischen Lehrgebäude von Bedeutung sind. Nur ganz kurz wollen wir auf einen wesentlichen Mangel unserer Darlegung hinweisen, ohne ihn hier zu beseitigen:

Unsere Definition gibt uns in keiner Weise einen Anhalt, ob überhaupt Gruppen verschiedener Potenz (in dem hier definierten Sinne) vorhanden sind, ob nicht vielmehr stets einer der beiden Fälle (2.) oder (3.) eintritt, daß nämlich zwei Gruppen immer entweder äquipotent oder unvergleichbar sind. Dem unbefangenen Urteile wird dies sogar als das wesentlich Naheliegendste er-

1) Für vergleichbare Gruppen gilt die ursprüngliche Definition.

scheinen. Es ist nun in der Tat, wie gesagt, praktisch gerade erzielt, daß unsere endgültige Definition als »Potenz« das umgrenzt, was wir mehr oder minder verschwommen intuitiv, ohne es näher beschreiben zu können, mit diesem Begriffe gemeint haben; wir erhalten nicht stets nur Äquipotenzen oder Unabhängigkeiten, sondern auch überall da, wo es überhaupt sinnvoll ist, ein Kriterium dafür, daß ein Urteil »mehr ausagt« als ein anderes. Aber dieses Resultat fällt uns in sehr angenehmer Weise in den Schoß, ohne daß wir uns eigentlich theoretisch ein Anrecht auf dasselbe erworben haben; es ist gewissermaßen eine Erfahrungstatsache (denn erst durch Prüfung an den vorhandenen Theorien können wir sie begründen) und teilt darum die Unvollkommenheit jeder Erkenntnis durch Erfahrung.

— Es liegt dies jedoch offenbar im Wesen des Problems begründet; denn erinnern wir uns an dieser Stelle, daß die gleichen Schwierigkeiten in der Cantorsche Mengenlehre auftreten: Aus der Definition der Mächtigkeit und aus dem Äquivalenzsatz ist in keiner Weise zu entnehmen, daß es verschiedene transfinite Mächtigkeiten überhaupt gibt, daß nicht vielmehr alles in ein einziges Unendlich zusammenfließt resp. unvergleichbar ist. Daß dem nicht so ist, bedarf bekanntlich eines besonderen Nachweises, welcher in der Aufweisung derartiger verschiedener Mächtigkeiten an bestimmten in unserer reinen Erkenntnis vorhandenen Mengen besteht, nämlich z. B. der Belegungsmenge einer Menge. —

Fünftes Kapitel.

Die deduktive Mannigfaltigkeit konstanter Potenz.

§ 16. Die Potenz quantitativ vergleichbarer Urteile.

In einem wichtigen speziellen Fall ist die Bestimmung der relativen Potenz zweier Einzelurteile besonders einfach, nämlich dann, wenn bei zwei Subsumptionsurteilen Subjekt oder Prädikat des einen Urteils in Umfangsubsumption zum Subjekt oder Prädikat des anderen Urteils entsprechend stehen. — Genau betrachtet gehört auch hier die Kenntnis eines vermittelnden Urteils γ dazu, nämlich eben dasjenige, welches behauptet, daß diese Umfangsubsumption besteht. Denn man kann nicht sagen, das Urteil »Alle Europäer sind Menschen« habe größere Potenz als das Urteil »Alle Deutschen sind Menschen«, wenn nicht bekannt ist, daß »Alle Deutschen Europäer sind«. Ohne weiteres erkennen wir nachstehende einfache Folgerungen aus der Definition des Potenzbegriffes:

Sind zwei Urteile p_1 und p_2 gegeben:

- $p_1: S_1 \subset P_1$ und $p_2: S_2 \subset P_2$
- und ist (1.) $S_1 \subset S_2$, aber $P_1 \equiv P_2$, so ist $\Pi(p_1) < \Pi(p_2)$;
 (2.) $S_1 \equiv S_2$, aber $P_1 \subset P_2$, so ist $\Pi(p_1) > \Pi(p_2)$;
 (3.) $S_1 \subset S_2$, aber¹⁾ $P_1 \supset P_2$, so ist $\Pi(p_1) < \Pi(p_2)$;
 (4.) $S_1 \subset S_2$ und $P_1 \subset P_2$,

so ist über eine Beziehung zwischen $\Pi(p_1)$ und $\Pi(p_2)$ noch nichts Bestimmtes festgelegt. Wir werden uns sogleich mit diesem letzten Fall (4.) näher befassen, da gerade er Anlaß zu einem für die deduktiven Theorien wichtigen Theorem gibt. — Zunächst erkennen wir, indem wir (1.), (2.) und (3.) zusammenfassen: Die Potenz eines Urteils ist eine Funktion des Umfanges der beiden Hauptbestandteile des Urteils; sie nimmt einen um so größeren Wert an, je größer der Umfang des Subjektes und je kleiner der Umfang des Prädikates ist. Man sagt offenbar mehr aus, wenn man mehr Gegenständen eine bestimmte Prädizierung erteilt (es bedarf z. B. dazu mehr Erfahrung); und ebenso ist eine Aussage desto inhaltsreicher, je spezieller das Prädikat ist.

§ 17. Im Falle nun (4), daß beide Begriffe des einen Urteils (p_1) Unterbegriffe der entsprechenden Begriffe des anderen Urteils (p_2) sind, kann über die Potenz von vornherein keine Aussage gemacht werden, da die eine Beziehung die gegenteilige Wirkung ausübt wie die andere, und es ist zunächst kein Maßstab ersichtlich, welcher angibt, welche von beiden Wirkungen überwiegt. — Ein solcher Maßstab kann nun gewonnen werden, wenn man wieder die Potenz als Relativbegriff zu einer bestimmten Theorie betrachtet. Es kann dann der Fall eintreten, daß sich beide Wirkungen gerade aufheben, sodaß also aus (4) unter ganz bestimmten Umständen folgt, daß $\Pi(p_1) = \Pi(p_2)$ ist, relativ zu einem Axiomensystem ω .

Haben wir nämlich die beiden Urteile

$$p_1: S_1 \subset P_1 \text{ und } p_2: S_2 \subset P_2$$

und ist (4):

$$S_2 \subset S_1 \text{ und } P_2 \subset P_1,$$

so kann es sich unter Umständen aus dem Axiomensystem ω ergeben, daß, wenn ein S_1 speziell ein S_2 ist, dies die sowohl hinreichende wie notwendige Bedingung dafür ist, daß ein P_1 speziell ein P_2 ist. »Ein S_1 ist insbesondere ein S_2 « stellt ein zu ω synthetisches Urteil dar, ebenso ist das Urteil »Ein P_1 ist speziell ein P_2 « zu ω synthetisch. Wir vollziehen nun den für die Theorie so charakteristischen Prozeß:

1) $P_1 \supset P_2$ ist eine andere Schreibweise für $P_2 \subset P_1$.

wir gehen zum Begriff des Sachverhaltes der synthetischen Urteile über. Wir definieren nämlich als Begriffsumfänge P_0 und S_0 die Umfänge obiger synthetischer Urteile:

$$\begin{aligned} S_0 &\equiv \{S_1 \subset S_2\} \\ P_0 &\equiv \{P_1 \subset P_2\}. \end{aligned}$$

Der Nachweis, daß »ein S_1 ist ein S_2 « die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß »ein P_1 ein P_2 ist«, bedeutet dann nichts als den Beweis des totalen¹⁾ Urteils:

$$p_0: S_0 \equiv P_0.$$

Besteht dieses Urteil, d. h. läßt sich dieses aus dem Axiomensystem ω herleiten, ist p_0 also ein zu ω analytisches Urteil, so ist ersichtlich $II(p_1) = II(p_2)$. Denn aus p_1 und p_0 läßt sich p_2 beweisen, und umgekehrt folgt aus p_2 und p_0 unmittelbar die Wahrheit von p_1 . — Ist die Bedingung zwar hinreichend aber nicht notwendig, so lautet das Hilfsurteil $S_0 \subset P_0$ und infolgedessen ist $II(p_1) > II(p_2)$. Läßt sich nur zeigen, daß die Bedingung notwendig ist, so folgt p_2 nicht aus der Wahrheit von p_1 und p_0 ; es ist dann $S_0 \supset P_0$ und $II(p_1) < II(p_2)$.

§ 18. Die charakteristische Form theoretischer Einheit.

Der hier skizzierte Prozeß ist ein sehr typisches und wertvolles Beweisverfahren, mit welchem die deduktiven Lehrgebäude aufgerichtet werden, und welches von viel umfassenderer Bedeutung ist als das in der traditionellen Syllogistik im Vordergrund stehende des Ketten schlusses. Es soll hiermit in keinerlei Weise behauptet werden, daß etwa in den deduktiven Theorien andere logische Prozesse vollzogen werden, als sie in der klassischen Syllogistik angegeben sind; wesentlich vielmehr ist für das Verfahren in einer Theorie, daß die syllogistischen Prozesse nicht allein in der Schicht der eigentlichen Urteile der Theorie stattfinden (nämlich der zu ω analytischen Urteile), sondern auch in der Schicht der Synthesen, welche den gleichen formalen Gesetzmäßigkeiten unterworfen sind, wie die Urteile.

Indem wir dieses eigentümliche Verfahren genauer untersuchen, werden wir zugleich ein Instrument gewinnen, um das alte Vorurteil zu prüfen, daß der deduktive Schluß notwendig von All-

1) Als »totales Urteil« bezeichnet W. Hamilton ein Subsumptionsurteil, dessen Subjekt und Prädikat umfangsgleich sind. (9) II, S. 257 ff. Eine systematische Darstellung der durch diesen singulären Urteilstyp möglich gemachten Syllogismen entwarf erst E. Wildschrey (36), nachdem schon B. Erdmann auf wesentliche Eigenschaften des totalen Urteils hingewiesen hatte (8), S. 349 ff., 679.

gemeinem zu Speziellerem führen müsse. Wir sehen an den vorangegangenen Ausführungen, daß es durchaus möglich ist, von Allgemeinem zu Gleichallgemeinem deduzierend zu gelangen: und zwar knüpft sich diese Möglichkeit an die Ableitung eines totalen analytischen Urteils $S_0 \equiv P_0$, dessen Gegenstände Sachverhalte von synthetischen Urteilen sind. Schon mehrfach ist auf die meist übersehene Bedeutung des totalen Urteils aufmerksam gemacht worden, welche eine ebenfalls allgemeine Umkehrung $P_0 \equiv S_0$ befügen, und es ist bekannt, daß Syllogismen mit solchen totalen Urteilen:

$$\begin{array}{c} S \subset M \\ M \equiv P \\ \hline S \subset P \end{array}$$

keine Spezialisierung darstellen¹⁾ und infolgedessen auch rückwärts gelesen werden können:

$$\begin{array}{c} S \subset P \\ M \equiv P \\ \hline S \subset M. \end{array}$$

Jedoch ist hiermit allein gerade der Kernpunkt noch nicht erschöpfend getroffen, denn derartige Schlußprozesse führen nur zu trivialen Resultaten. Erst durch die Zwitterstellung der Synthese – sowohl als Gegenstand in der Sphäre der analytischen Urteile, wie wenigstens seiner formalen Gesetzmäßigkeiten nach als Urteil zu erscheinen – wird es möglich, daß die Syllogismen mit totalen Urteilen zu fruchtbaren Resultaten führen. Besser als diese abstrakten Überlegungen wird die Diskussion eines elementaren Beispiels aus der Geometrie die grundlegende Bedeutung unserer Betrachtung vor Augen führen:

Es handle sich um folgende zwei Urteile p_1 und p_2 :

$p_1: S_1 \subset P_1$ »Alle Rechtecke sind Vierecke mit gleichlangen Diagonalen«.

$p_2: S_2 \subset P_2$ »Alle Quadrate sind Vierecke mit gleichlangen und aufeinander senkrechten Diagonalen«.

Wir behaupten nun, daß p_1 und p_2 zu ω (den Axiomen der euklidischen Geometrie) von gleicher Potenz sind und daß aus der Gültigkeit von p_1 diejenige von p_2 folgt.

Es liegt Fall (4.) vor, denn p_2 sagt spezielleres über speziellere Gegenstände aus; denn es sind zu ω analytische Urteile:

1) Siehe die letzte Fußnote. Bei Erdmann l. c. S. 717 findet sich erstmalig wohl eine zwar nicht befriedigende Kritik des erwähnten Vorurteils über die Spezialisierung beim Schlußfolgern. Auf dieser Kritik fußen die vorliegenden Untersuchungen und bemühen sich, dieselbe richtig zu stellen. –

$S_2 \subset S_1$ »Alle Quadrate sind Rechtecke«.

$P_2 \subset P_1$ »Alle Vierecke mit gleichen und senkrechten Diagonalen sind eine Teilmenge der Vierecke mit gleichen Diagonalen«.

Zum Beweise der Äquipotenz von p_1 und p_2 werden wir zu zeigen haben, daß S_2 um ebensoviele spezieller ist als S_1 (relativ zu ω), wie P_2 spezieller ist als P_1 , daß also die Wahrheit des synthetischen Urteils:

s: »Ein S_1 ist ein S_2 « »Ein Rechteck ist ein Quadrat« (Die Voraussetzung)

notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß das andere synthetische Urteil (die Behauptung) wahr ist:

p: »Ein P_1 ist ein P_2 « »Die Diagonalen stehen aufeinander senkrecht«.

Sind a, b, c, d die Seiten, e, f die Diagonalen des Rechtecks, so können wir den Gegenstand »Rechteck« seinerseits als den Sachverhalt des synthetischen Urteils¹⁾ ansehen; $\angle(a, b) = \angle(b, c) = \angle(c, d) = \angle(d, a) = 90^\circ$. Der Umfang des Begriffes S_1 »Rechteck« ist also in unserer Schreibweise der Umfang dieses synthetischen Urteils:

$$\{\angle(a, b) = \angle(b, c) = \angle(c, d) = \angle(d, a) = 90^\circ\}.$$

Das zu ω analytische Urteil p_1 verknüpft nun den Umfang S_1 dieses synthetischen Urteils mit dem Umfange P_1 des Urteils: »die Diagonalen e und f sind gleich«, so daß also $S_1 \subset P_1$ ist:

$$p_1: \{\angle(a, b) = \angle(b, c) = \angle(c, d) = \angle(d, a) = 90^\circ\} \subset \{e = f\}.$$

Das synthetische Urteil s (die Voraussetzung) »Ein Rechteck ist ein Quadrat« schreibt sich $a = b$; dieses Urteil ist bekanntlich nicht immer wahr, denn als synthetisches Urteil folgt seine Wahrheit²⁾ nicht notwendig aus der Wahrheit von ω . $\{a = b\}$ ist die Menge der Fälle, in denen das Urteil wahr ist; sie ist mit S_1 der Umfang von s .

Das synthetische Urteil p (die Behauptung) »Die Diagonalen stehen aufeinander senkrecht« schreibt sich $\angle(e, f) = 90^\circ$.

Zur Äquipotenz ist also zu zeigen, daß beim Rechteck das totale Urteil $\{s\} \equiv \{p\}$ zu ω analytisch ist:

$$p_0: \{a = b\} \equiv \{\angle(e, f) = 90^\circ\}.$$

Der übliche Beweis (durch Anwendung eines Kongruenzsatzes) zeigt ohne weiteres, daß die Diagonalen eines Rechtecks dann aber auch nur dann aufeinander senkrecht stehen, wenn das Rechteck ein Quadrat ist.

1) Vgl. die Darstellung der Nominaldefinition § 11 Ende.

2) Seine Möglichkeit folgt aus ω mittels des analytischen Urteils $S_1 \subset S_1$.

Er benutzt zunächst folgende drei Synthesen, die der Voraussetzung und Definition nach und gemäß p_1 bestehen: $a = b$, $e = f$, $\sphericalangle(d, a) = \sphericalangle(a, b)$ und ersetzt sie durch die Synthese $\sphericalangle(a, e) = \sphericalangle(b, f)$, denn diese letzte Synthese besteht nach dem vierten Kongruenzsatz (d. h. nach ω) zugleich mit den obigen drei Synthesen.

Diese Synthese $\sphericalangle(a, e) = \sphericalangle(b, f)$ wird aber, vereint mit der Synthese $\sphericalangle(a, b) = 90^\circ$ ersetzt durch die Synthese $\sphericalangle(e, f) = 90^\circ$ nach dem Satze (aus $B[\omega]$), daß zwei gerade Linien, die mit zwei aufeinander senkrechten Geraden gleiche Winkel bilden, selbst aufeinander senkrecht stehen.

Wir haben also im Beweise eine Folge von Substitutionen von Synthesen:

$$\begin{aligned} & \{a = b; e = f; \sphericalangle(d, a) = \sphericalangle(a, b) = 90^\circ\} \\ \equiv & \{ \sphericalangle(a, e) = \sphericalangle(b, f); \sphericalangle(a, b) = 90^\circ; \sphericalangle(d, e) = \sphericalangle(a, f); a = b \} \\ \equiv & \{ \sphericalangle(e, f) = 90^\circ = \sphericalangle(a, b); \sphericalangle(d, e) = \sphericalangle(a, f); a = b \}^1. \end{aligned}$$

Hiermit haben wir das totale analytische Urteil p_0 bewiesen. Aus ihm und p_1 folgt p_2 , welches somit als zu p_1 äquipotent erkannt ist. — Diesen Typ der Beweisführung wird man überall wiederfinden. Eine ökonomisch angelegte Theorie wird sich offenbar bemühen, möglichst lange nur in dieser Schlußform vorzugehen, ist doch der Aussagegehalt, der einmal durch Spezialisierung beim Schlußfolgern verloren gegangen ist, ein für allemal nicht wieder herstellbar.²⁾ In dem geschilderten Beweisprozeß jedoch wird die Spezialisierung des Subjektes völlig in die Prädizierung entsprechend hineingearbeitet.

Man wird im allgemeinen von vornherein nicht in der Lage sein, angeben zu können, wie diese entsprechend engere Prädizierung zu lauten hat; daher sind die Resultate dieser deduktiven Prozesse durchaus nicht Trivialitäten, als welche man meist die Theorie der Syllogismen als erledigt beiseite legte, weil man glaubte, mit der Kenntnis der Schlußformen das ganze Geheimnis der theoretischen Mannigfaltigkeiten zu durchschauen. Aber man hatte jene wohl merkwürdigste und fruchtbarste Funktion des Logischen übersehen: das über Gegenstände gedachte Urteil selbst zum Gegenstande eines neuen abstrakteren Denkaktes erheben zu können. Man hatte zugleich hiermit die wich-

1) Die mit kleinerer Schrift bezeichneten Synthesen führen auf keine neuen Resultate und können deshalb weggelassen werden.

2) Wir zeigten (§ 12), daß, wenn α eine Folge von β ist, $\Pi(\alpha) \leq \Pi(\beta)$ gilt. Dieser »Entropiesatz« für deduktive Prozesse begründet die Bedeutung des geschilderten Beweisverfahrens und charakterisiert es als einen »reversiblen« Prozeß.

tige Bedeutung der Synthesis nicht richtig erkannt, daß in den Axiomen einer deduktiven Theorie ein formendes Element gegeben sein kann, zu neuen Gestalten zu gelangen und so konstruierend den Bereich der einer Theorie erfaßbaren Gegenstände in bestimmter Richtung zu erweitern, deren Eigenschaften zu deduzieren, durchaus nicht trivial ist. Diese deduzierbaren Erkenntnisse sind allerdings nur Formalerkenntnisse: in der Geometrie etwa über die Formen, in die wir Punkte, Geraden, Ebenen zu einer Figur anordnen, in der Analysis über die Beziehungen, in denen wir quantitative Elementarabhängigkeiten (die vier Spezies, Grenzübergang usw.) zu »Funktionen« zusammensetzen; in der Physik über die Formen, in welchen wir Körperelemente (Massenpunkte, Atome usw.) zu Mechanismen, Apparaten und Systemen konstruieren. Wir dürfen jedoch den Umfang einer solchen Formalerkenntnis nicht unterschätzen. Die Entwicklung der mathematischen Physik der letzten 100 Jahre hat uns darüber belehrt, in wie ungeahnter Weise sich die große Zahl von bisher gesondert betrachteten empirischen Erkenntnissen zu einer formalen Konstruktion einer winzigen Zahl von Elementarerkenntnissen auflöste.

Im Axiomensystem liegen allein für die Konstruktionselemente einer deduktiven Theorie urteilsmäßige Bestimmungen vor. In der Geometrie sind es Sätze über Punkte, Geraden, Ebenen. Die Differentialgleichungen der Physik sind Gesetzmäßigkeiten über die materiellen Prozesse in Volumenelementen, deren Integration — das Zentralproblem der mathematischen Physik — nichts anderes darstellt als die Synthese der Infinitesimalvorgänge zu Vorgängen in ausgedehnten Körpern und Körpersystemen von irgendwelcher gegebenen Anordnung. Die zwischen den Elementargebilden axiomatisch festgelegten Beziehungen definieren die Potenz $\Pi(\omega)$ der Theorie. Konstruieren wir uns aus diesen Elementen ein Objekt (eine analytische Funktion, eine geometrische Figur, ein thermodynamisches System oder einen Mechanismus), welches gemäß den Existentialaxiomen gebildet sein muß, so werden wir ihm so viel als möglich an Präzisierung zuzuerteilen suchen. Aber hierfür existiert offenkundig eine charakteristische obere Schranke, welche nicht überschritten werden kann, und die nur dann erreicht wird, wenn wir durch äquipotente Schlußprozesse von den Axiomen zu dem neu definierten Objekt übergehen. In diesem Falle ist das Maximum an (voneinander unabhängiger) Präzisierung erreicht, welches das betreffende Objekt überhaupt zu tragen vermag. Das Urteil, das diese Präzisierung dem Subjekte beilegt, ist offenbar ein totales,

und zwar ist es total nur relativ zur betreffenden Theorie ω ; denn innerhalb der Theorie ist jenes Subjekt auch durch seine vollständige Prädisierung eindeutig definiert. Wie eine einfache Überlegung zeigt, hat dieses Urteil die Potenz $\Pi(\omega)$, also die größte Potenz, die überhaupt in der Theorie auftreten kann. Wir haben also durch Anwendung des äquipotenten Schlußverfahrens gewissermaßen den ganzen Aussagegehalt von ω dem neu konstruierten Gegenstande zugeführt. Dieses Resultat ist sehr merkwürdig; es besagt nichts geringeres, als daß die erschöpfende Kenntnis irgendeines in der Theorie auftretenden Gegenstandes, die sich durch das die Maximalprädisierung tragende totale Urteil ausdrückt, gleichwertig ist mit der Kenntnis der ganzen Theorie. Diese scheinbare Paradoxie ist nur eine andere Fassung der schon früher (§ 15) vermuteten Tatsache, daß ein Teil einer Theorie der ganzen Theorie äquipotent sein kann. In der ältesten und entwickeltsten aller Theorien, der Geometrie, ist dieser Sachverhalt in weitem Umfange zu bedeutamer Anwendung gelangt, nachdem von Plücker wohl zuerst erkannt worden war, daß durchaus kein Zwang vorliegt, den Punkt als das figurenerzeugende Raumelement zu betrachten. Man kann die geraden Linien, Kreise oder andere Gebilde als primitiv auffassen, zwischen ihnen axiomatisch die nötigen Beziehungen herstellen – die also in der Punktgeometrie durch äquipotente Schlußweisen ihnen deduktiv zuerteilt werden – und nunmehr aus ihnen alle geometrischen Gebilde zusammenlegen. Diese Methode hat sich von ungeahnter Fruchtbarkeit gezeigt; für uns hat sie die wichtige Bedeutung, ein Beispiel dafür zu sein, daß eine Theorie auf einen ihrer eigenen Teile abgebildet werden kann.¹⁾

§ 19. Die Theorie des Kalküls.

Die Möglichkeit der Konstanthaltung einer axiomatisch gegebenen Potenz, an welcher eine ökonomisch angelegte Theorie großes Interesse hat, knüpft sich, wie wir darzustellen suchten, an die Auffindung von zugleich hinreichenden und notwendigen Bedingungen für das Bestehen einer bestimmten Synthese. Prüfen wir daraufhin die vorliegenden ausgebauten Theorien, so finden wir in der Tat durchaus diese Behauptung bestätigt: In der historischen Gestaltung dieser Theorien ist es das überall hervorleuchtende Zentralproblem: für eine bestimmte Eigenschaft diejenigen Kriterien oder Bedingungen aufzustellen, welche weder zu eng noch zu weit, d. h. aber die fo-

1) Im Anhang wird, auf diese Verhältnisse eingehend, der Versuch einer rein formalen Definition des Potenzbegriffes gemacht.

wohl notwendig wie hinreichend sind; ja für den forschenden Eros des Theoretikers (im Gegensatz zu dem des Empirikers) erscheint allein die Kenntnis dieser Bedingungen als die einzig befriedigende und vor allem die nachweisbar ein für allemal erschöpfende Erkenntnis eines Gegenstandes. Mit dieser Kenntnis erscheint ihm eine Eigenschaft restlos erkannt. Er vermag in diesem Falle die erfüllten Voraussetzungen oder Kriterien jener Eigenschaft identisch zu setzen, derartig, daß sie die Eigenschaft bzw. die Eigenschaft die Kriterien beliebig vertreten können. Die urteilsmäßige Fassung einer solchen Erkenntnis hat die Form eines totalen Urteils.

Aber hiermit ist das entscheidende Wort in der Beschreibung des Gefüges einer theoretischen Mannigfaltigkeit noch nicht gesagt: Es ist nun zu beachten – und am Übersehen dieses Umstandes scheiterten die bisherigen Erklärungsversuche der deduktiven Prozesse in einer Theorie –, daß von diesem totalen Urteile, welches ein zu ω analytisches Urteil ist, nunmehr nicht durch einfache Syllogismenbildung mit anderen totalen Urteilen fortgeschritten wird (etwa aus $S \equiv M$; $M \equiv P$ folgt $S \equiv P$); wenn auch die so gewonnenen Resultate zu den Prämissen äquipotent sind, so stellen sie doch nur eine sehr triviale Erweiterung der Erkenntnis dar. Tatsächlich wird kaum jemals in dieser Weise in einer Theorie deduziert. Vielmehr geht man in die Schicht derjenigen zu ω synthetischen Urteile über, deren Sachverhalte Gegenstände jenes totalen analytischen Urteils darstellen; an diese synthetischen Urteile setzt das syllogistische Verfahren an und verwandelt sie (mit Hilfe der Subsumptionsaxiome und aus diesen abgeleiteten analytischen Subsumptionsurteilen) in andere Synthesen, und zwar bestehen diese neuen Synthesen dann und nur dann, wenn auch die ursprünglichen bestehen, da die Subsumptionsaxiome totale Urteile darstellen. Am analytischen Ausgangsurteil erscheinen diese Syllogismen nicht als Schlußprozesse, sondern als Substitutionen der Begriffe im Subjekt und Prädikat durch andere, die ihnen umfangsgleich sind, nach bestimmten axiomatisch festliegenden Regeln; ein derartiges Verfahren nennt man gewöhnlich einen »Kalkül«. Er ist nichts als ein abgekürzter syllogistischer Prozeß in der Schicht der zu ω synthetischen Urteile; abgekürzt nämlich insofern, als die zweite Prämisse des Schlusses weggelassen und als »Verknüpfungsgefeß« nur im Geiste jedesmal gesetzt wird. Dies ist die fundamentale Bedeutung des Kalküls für die Theorie.

Wir erkennen an dieser Stelle, wie der Dualismus zwischen den beiden Urteilsphären, der zu ω analytischen und synthetischen,

korrespondiert mit dem Dualismus im Axiomensystem, welchen wir im zweiten Kapitel entwickelten, wo wir uns veranlaßt sahen, die nur Verknüpfungsgeetze definierenden Subsumptionsaxiome zu unterscheiden von den Existentialaxiomen, welche derartigen Relationen gehorchende Gegenstände einführten. Damit aber schließen sich unsere axiomatischen Betrachtungen im zweiten Kapitel mit den hier gewonnenen Resultaten zu einem einheitlichen Ganzen, und wir sind in den Stand gesetzt, von den Axiomen ausgehend den gesamten Mechanismus der deduktiven Mannigfaltigkeit aufbauend zu begreifen.

Zu diesem Resultate konnte die klassische Syllogistik trotz der umfassenden und in gewissem Sinne abschließenden Behandlung, die gerade die Theorie des Kalküls («Logik der Relationen» meist genannt) durch Russell und durch die Schule Peanos in den letzten Jahrzehnten erfuhr¹⁾, unmöglich gelangen, solange sie sich darauf beschränkte, nur das Urteils- und Schlußphänomen zum Gegenstande ihrer Untersuchung zu machen. Obwohl, wie wir sahen, der Vorgang des Beweises im einzelnen nur aus syllogistischen Prozessen besteht, ist durch die logische Analyse der einzelnen Elementarbestandteile das Verständnis desselben im wesentlichsten Punkte noch nicht gewonnen. Um zu diesem Verständnis zu gelangen, bedarf es einer Betrachtungsweise, welche sich die Theorie als Ganzes zum Gegenstande macht, und der Anwendung von Methoden, welche erst in der Mannigfaltigkeitslehre geschaffen wurden und damit erst mittelbar logischer Herkunft sind. Über die Fragen, die durch diese Methoden in den Betrachtungsbereich gerückt sind, wie über die Potenz, über Unabhängigkeit usw. von Urteilsystemen, vermag die subtilste Logik des elementaren Urteils und des elementaren Schlußprozesses allein keine Auskunft zu ermitteln. Denn das Ganze einer deduktiven Mannigfaltigkeit ist nicht die Summe ihrer Teile.

Anhang.

§ 20. Der Ordnungscharakter einer deduktiven Mannigfaltigkeit.

Wir haben den Bereich $B(\alpha)$ einer Gruppe α von Urteilen bisher nur sehr summarisch durch die Begriffsbildung der Potenz zu charakterisieren vermocht. Eine Theorie ist mehr als ein bloßes zusammengewürfeltes Aggregat von Urteilen; die einzelnen Urteile

1) Siehe Russell (32.)

bilden in ihr eine charakteristische Struktur, die Anordnung nämlich, in welcher sie deduziert wurden. Indem wir durch eine geeignete Erweiterung unserer Begriffsbildungen auch diesen Ordnungscharakter unserer Betrachtung zugänglich machen, werden wir ein umfassendes Instrument gewinnen, welches einen Teil der noch stehen gebliebenen Dunkelheiten mit einem Schlage zu klären vermag, welches zugleich aber auch zeigt, in welcher Richtung weiterhin die Theorie deduktiver Mannigfaltigkeiten vielleicht fruchtbare Entwicklungsfähigkeit besitzt.

Liegt eine widerspruchsfreie Gruppe ω als Axiomensystem gegeben vor, so ist dieser eindeutig ein wohldefinierter Bereich $B(\omega)$ zugeordnet. Aber diese Zuordnung ist durchaus nicht umkehrbar eindeutig: In einem Bereiche $B(\omega)$ kann stets die bisher als Axiomgruppe angesehene Gruppe ω bewiesen werden, wenn man sich entschließt, ursprünglich abgeleitete Urteile nunmehr als Axiome anzusehen. Denn insofern die charakteristischen Beweise einer Theorie aus Syllogismen mit totalen Urteilen resp. umkehrbaren Relationskalkülen bestehen, können die Prämissen mit den Nachsätzen vertauscht werden und ganze Beweisketten rückwärts gelesen werden. Es ist also bis zu einem gewissen Grade willkürlich, ob man in einem Gebiete relativ verknüpfter Wahrheit ein Urteil als Lehrsatz oder als Definition betrachten will, und ein Urteil ist insbesondere unbeweisbar (Axiom) einzig hinsichtlich einer bestimmten Beweis- und Definitionenfolge. Es gibt infolgedessen logisch kein ausgezeichnetes Axiomensystem für ein bestimmtes Erkenntnisgebiet.¹⁾ Alle diese möglichen Axiomgruppen eines Bereiches sind äquipotent; denn sie erzeugen alle denselben Bereich von Urteilen; aber die Reihenfolge, in der die Urteile des Bereiches aus diesen äquipotenten Gruppen abgeleitet werden, ist verschieden. Der Bereich wird jedesmal in anderer Weise geordnet.

Diese Anordnungen zu charakterisieren, ist unsere nächste Aufgabe; sie ist nicht ganz einfach, denn die Anordnungen sind keineswegs linearer Natur, so daß etwa von zwei Urteilen stets entschieden wäre, welches dem anderen vorangeht. Wir müssen diesem in der Mengenlehre gebräuchlichen Ordnungsbegriff eine Verallgemeinerung erteilen, um die komplizierteren Ordnungstypen der deduktiven Mannigfaltigkeiten charakterisieren zu können. — Liegt ein bestimmter Bereich in bestimmter Weise entwickelt vor, als eine endliche oder abzählbar unendliche Menge von Urteilen, so gehört zu jedem Urteil p eindeutig eine Teilgruppe des Bereiches, welche bei der de-

1) Vgl. Couturat l. c. S. 39; M. Schlick l. c. S. 44. G. Peano (23), S. 280.

duktiven Ableitung von p benötigt wird, und die wir als die »Gruppe der Vorfahren« von p bezeichnen.

Sind nun zwei Bereiche in bestimmter Weise entwickelt gegeben und besteht zwischen ihren Urteilen eine eindeutig umkehrbare Abbildung der Art, daß, wenn dem Urteil p des einen Bereiches das Urteil q des anderen Bereiches entspricht, zugleich auch jedem Vorfahren von p stets ein und nur ein Vorfahr von q zugeordnet ist, so sollen die beiden Bereiche »äquiform« heißen. Die Gesamtheit der zu einem bestimmten Bereich äquiformen Bereiche definiert ein Gemeinfames¹⁾, ihren »Ordnungscharakter«. Bereiche, die gleichen Ordnungscharakter und gleiche Potenz besitzen, brauchen noch nicht Urteil für Urteil identisch bezogen zu sein. Außerdem ist es möglich, daß ein Bereich seinem äquipotenten Teilbereich (vgl. § 18) unter Umständen auch äquiform ist. Die mannigfachen Übertragungsprinzipie, vor allem der Geometrie, sind interessante Belege für diese Tatsachen.²⁾

§ 21. Eine weitere Verallgemeinerung des Potenzbegriffs.

Der Begriff »äquiform« ist insofern enger als der Begriff »äquipotent«, als gleiche Potenz für Äquiformität notwendig vorausgesetzt werden muß. Er ist aber zugleich auch wesentlich weiter, da er auch zwischen Bereichen ohne gemeinsame Urteile, für die der Potenzbegriff nicht bestimmbar war, eine Beziehung herstellen kann. Er ist nämlich im Gegensatz zum Begriff »äquipotent«, wie er bisher definiert war, eine reine Formalbeziehung, die unabhängig vom Inhalte der Urteile ist. Da nun einerseits alle äquiformen, vergleichbaren Bereiche notwendig äquipotent sind, andererseits aber die Äquiformität eine Beziehung herstellt auch zwischen Bereichen, für welche die Potenz nicht definiert ist, so liegt es nahe, den Begriff der Potenz dahin zu erweitern, daß die Äquiformität stets hinreichende Bedingung für Äquipotenz sei. Hiermit hat der Begriff der Potenz eine Erweiterung erfahren auf ein Gebiet, in welchem er bisher nicht definiert war, aber derart, daß die bisherige Definition in ihrem ursprünglichen Gebiete ihre Gültigkeit nicht verliert,

1) Vgl. die Definition der Potenz in § 12 durch Abstraktion, sowie das dortige Zitat.

2) Die Idee, eine deduktive Mannigfaltigkeit als Repräsentanten eines »Ordnungstypus« anzusehen, findet sich schon bei J. Royce l. c. angedeutet, der von einer pragmatistischen Behandlung der Logik ausgeht. Da aber diese Abhandlung weder eine brauchbare Definition des Ordnungstypus kennt, noch sonst zu nennenswerten Resultaten oder wenigstens Fragestellungen führt, blieb dieser Versuch unbeachtet (i. insbes. Kap. II der zit. Abh.)

so daß also unsere früheren Resultate richtig bleiben; zugleich haben wir hiermit der Potenz erst die formale Bedeutung erteilt, die ihr offenbar als Gegenstand einer reinen Formaltheorie gebührt, und wir ahnen, daß die Möglichkeit nicht abzuweisen ist, daß nunmehr zwischen allen Bereichen eine Potenzbeziehung definiert ist. Man könnte vielleicht auf die Idee kommen zu fragen, warum denn nicht von Anfang an gleich als »äquipotent« solche Gruppen hingestellt wurden, deren Bereiche eindeutig aufeinander bezogen werden können, wodurch eine reine Formaldefinition gewonnen wäre. Es konnte nicht so vorgegangen werden; denn wir wären zu dem etwas eintönigen Resultat gelangt, daß alle unendlichen Bereiche als äquipotent anzusehen seien; denn alle Bereiche – soweit sie nicht endlich sind – haben die Mächtigkeit \aleph_0 und können infolgedessen stets einander zugeordnet werden. Erst das Hinzunehmen des Ordnungsbegriffs ermöglicht es, das zunächst unbestimmt ineinander zusammenfließende Unendlich geeignet zu scheiden. Es drängt sich hier der Vergleich mit der Definition der transfiniten Ordnungszahlen auf Grund der wohlgeordneten Typen der Mengenlehre auf, welche in der Tat diesen und den folgenden Betrachtungen eine starke methodische Anregung war.

§ 22. Ein hypothetisches Theorem.

Aber der Ordnungsbegriff genügt nicht, um allein auf ihm den Potenzbegriff zu begründen, da äquipotente Bereiche durchaus nicht gleichgeordnet zu sein brauchen, außerdem aber es gar nicht feststeht, ob bei Bereichen verschiedener Potenz (im Sinne der alten Definition) die Ordnung des einen Bereiches mit der des entsprechenden Teilbereiches übereinstimmt. Insofern also ist unsere in § 21 gemachte Festsetzung: »Alle äquiformen Bereiche sollen äquipotent sein«, nicht mehr als eine zweckmäßige Erweiterung des bisherigen Potenzbegriffes, eine Übertragung desselben auf ein Gebiet, in welchem es bisher sinnlos war, ihn anzuwenden. Für eine Formaldefinition der Potenz ist sie aber unzureichend.

Es ist nun interessant zu verfolgen, daß sich die Möglichkeit einer rein formalen (vom Inhalt der Urteile absehenden) Fundierung offenbar an die Gültigkeit eines einzigen Theorems sich knüpft. Dieses Theorem müßte besagen, daß alle deduktiven Theorien – deren Anordnung ja noch in weitem Maße der Willkür freisteht – gewissermaßen nach demselben Bauplane errichtet werden können. Oder um diesen hypothetischen Satz präzise zu formulieren: »Es existiert für jeden Bereich von Urteilen eine Möglichkeit der An-

ordnung, die wir »Hauptordnung« nennen, von der Eigenschaft, daß von zwei beliebigen in der Hauptordnung entwickelten Bereichen stets wenigstens der Eine dem Anderen ganz oder zum Teil äquiform ist.« Ließe sich dieser wichtige und nicht unwahrscheinliche Satz beweisen, so wäre zugleich ein außerordentlicher Fortschritt in der Theorie der deduktiven Mannigfaltigkeiten gemacht. Es bestände zunächst die Möglichkeit einer rein formalen Definition der Potenz, indem man den fraglichen Bereich nach der Hauptordnung entwickelt voraussetzt und ihn dann mit den ebenso angeordneten anderen Bereichen vergleicht. Die Gültigkeit des Satzes würde die Möglichkeit unvergleichbarer Bereiche ausschließen. Andererseits ergäbe sich durch ihn eine einfache Deutung der früher (§ 9) erwähnten Relativität der Widerspruchslosigkeit, indem sich stets die Widerspruchslosigkeit eines Bereiches nur relativ auf die eines anderen stützen ließ, dagegen ein absoluter Nachweis der Widerspruchslosigkeit einer Gruppe sich als kaum möglich erwies. — Der geforderte Beweis des fraglichen Satzes würde schließlich zugleich den Nachweis des Bestehens jener früher¹⁾ vermuteten, höchst allgemeinen umfassenden Theorie bedeuten, aus der alle jemals möglichen Theorien durch passende inhaltliche Interpretation ihrer reinen Formalgegenstände als Spezialfälle hervorgehen. Denn falls alle Bereiche ganz oder zum Teil äquiform angeordnet werden könnten, würden sie bei passender Bezeichnung ihrer nur implizite definierten Gegenstände Teilen einer einzigen umfassenden Theorie identisch werden. (Hierbei würde im übrigen zugleich die alte Definition der Potenz — allein durch Identität von Bereich mit (Teil-)Bereich — wieder anwendbar werden). Die Tatsache, daß die auf implizite Definitionen gegründeten Theorien zusammenhanglos in der Luft schweben, verlore damit alles Unbefriedigende, indem sie sich gewissermaßen zu einem einzigen zusammenhängenden Bereich formaler Wahrheit vereinigten, wie wir es schon § 5 vermuteten.

Die Richtigkeit dieses bedeutsamen Satzes nachzuweisen, dessen Parallele mit dem Wohlordnungssatz unverkennbar ist, davon dürften wir heute noch sehr weit entfernt sein. Es besteht bisher noch nicht einmal eine orientierende Kenntnis darüber, welcher Art die notwendigen Bedingungen sind, daß ein Axiomensystem ω überhaupt einen unendlichen Bereich erzeugt; an derartig primitivsten Bereichen aber müßten erst die möglichen Strukturen festgestellt werden, und dabei müßte untersucht werden, ob es unter ihnen an Einfachheit be-

1) Vgl. § 5 Ende.

sonders ausgezeichnete gibt, ob es vielleicht eine deduktive Systematik linearer Struktur gibt, derart, daß zwischen zwei Urteilen eines Bereiches stets entschieden ist, welches dem anderen vorangeht, eine Beziehung, die im deduktiven Systeme, wie es uns gewöhnlich begegnet, und das wir passend mit dem komplizierten Geftrupp der Beziehungen unter Personen durch Verwandtschaft verglichen, durchaus nicht vorhanden zu sein pflegt.

Herangezogene Literatur.

1. E. Becher: Geisteswissenschaften und Naturwissenschaften. Leipzig 1921.
2. „ Die philosophischen Voraussetzungen der exakten Naturwissenschaften. Leipzig 1906.
3. B. Bolzano: Wissenschaftslehre. Sulzbach 1837.
4. C. Burali-Forti: Sur les différentes méthodes logiques pour la définition du nombre réel. (Bibliothèque du congr. internat. de Philos. Paris 1903).
5. G. Cantor: Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten, Mathem. Ann. 20, 21.
6. E. Cassirer: Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Berlin 1910.
7. L. Couturat: Die philosophischen Prinzipien der Mathematik. Leipzig 1908.
8. B. Erdmann: Logik I². Halle 1907.
9. W. Hamilton: Lectures on Logik. Edinburg u. London 1860.
10. H. Hertz: Die Prinzipien der Mechanik. Leipzig 1910.
11. G. Hessenberg: Grundbegriffe der Mengenlehre. (Abh. d. Fries'schen Schule, neue Folge, Bd. I. Göttingen 1906).
12. E. Hufferl: Logische Untersuchungen, 2. Aufl. Halle 1913.
13. J. Kant: Kritik der reinen Vernunft (nach der 2. Aufl. 1787).
14. „ Vorlesungen über Logik (gef. Werke Hartenstein, Bd. VIII).
15. „ Prolegomena zu jeder künftigen Methaphysik (nach d. 1. Aufl. 1783).
16. F. Klein: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen 1872, abgedr. math. Ann. 43.
17. J. König: Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre. Leipzig 1914.
18. H. Loewy: Algebra I. Leipzig 1915.
19. H. Meinong: Über Gegenstandstheorie. Leipzig 1904.
20. J. St. Mill: System der deduktiven und induktiven Logik, deutsch. Stuttgart 1864.
21. P. Natorp: Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften. Leipzig 1910.
22. A. Padoa: Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque. Bibl. d. Congr. d. Phil. III. Paris 1903.
23. G. Peano: Les définitions mathématiques. (Bibliothèque d. Congrès de Philos. III. Paris 1903).

24. G. Peano: *Formulaire de Mathém.* Turin 1891 – 95.
 25. H. Poincaré: *Wissenschaft und Methode.* Leipzig 1910.
 26. „ *Wissenschaft und Hypothese.* Leipzig 1904.
 27. „ *Der Wert der Wissenschaft.* Leipzig 1908.
 28. A. Pfänder: *Logik.* (Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung, Halle 1921).
 29. B. Riemann: *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.* (Werke, Leipzig 1876).
 30. J. Royce: *Prinzipien der Logik.* (Windelbands Enzyklop. d. philos. Wissenschaft, 1912).
 31. B. Russell: *The principles of mathematics I.* Cambridge 1903.
 32. „ *Sur la logique des relations* (*Revue de mathématiques de G. Peano, Turin 1902*).
 33. M. Schlick: *Allgemeine Erkenntnislehre.* Berlin 1918.
 34. E. Schröder: *Algebra der Logik.* Leipzig 1890 f.
 35. H. Weyl: *Das Kontinuum.* Leipzig 1918.
 36. E. Wildschrey: *Grundlagen zu einer vollständigen Syllogistik.* Halle 1906.
 37. E. Zermelo: *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I.* *Math. Ann.* 65 (1908).
-