
SUR LES NOMBRES DE M. RUSSELL

On se rappelle la fameuse « définition logique du nombre » que M. Bertrand Russell a donnée dans ses *Principles of Mathematics*¹ et qui, pendant de longues années, fut l'objet d'une discussion fort vive, pour ne pas dire d'un combat acharné entre les partisans de la logistique — notamment B. Russell et L. Couturat, et ses adversaires, brillamment représentés en France par M. Poincaré. Malheureusement, ce combat, comme d'ailleurs presque tous les combats de ce genre n'eut aucun résultat positif.

Il est vrai qu'on écrivit et publia une quantité presque innombrable d'articles en une dizaine de langues différentes, et que certains problèmes relatifs à la logique et à la philosophie des mathématiques furent traités avec une profondeur et une finesse admirables — je n'ai que besoin de mentionner les articles de M. Poincaré, publiés dans cette *Revue* même — mais à la fin des fins personne ne fut persuadé, et comme c'étaient les logisticiens qui se défendaient et leurs adversaires qui attaquaient, ce fut même une bataille gagnée par les premiers, perdue par les derniers.

Dans les années qui suivirent ce combat, la définition en question, que M. Russell lui-même a toujours conservée — voir son récent ouvrage² — trouva un accueil bien cordial parmi les arithméticiens du monde entier, de sorte qu'elle est à l'heure actuelle presque universellement adoptée.

Si je me suis décidé à reprendre cette question discutée dans tant d'écrits et d'en augmenter le nombre par une nouvelle critique de cette définition célèbre, c'est pour des raisons bien graves :

1° Les arguments que je me propose d'exposer me semblent décisifs;

2° Bien que parfaitement simples — ou peut-être à cause de cette

1. Cf. *Principles of Mathematics*, p. 115, 372.

2. *Principia Mathematica*, Cambridge 1910, en collaboration avec M. Whitehead, § 52. The number one is the class of all the unit classes.

simplicité même? — ils ne furent pas discutés dans la littérature concernant ce problème, du moins dans celle que je connais.

Je serai d'ailleurs très bref.

Voici la définition¹ : « The number of a class is the class of all classes similar to the given class² ».

Il s'ensuit que : 1° chaque nombre est un ensemble³ qui se contient lui-même comme élément de second ordre.

2° Chaque nombre est un ensemble paradoxal.

Qu'il me soit permis d'introduire quelques symboles pour abréger la démonstration. Nous désignerons les « nombres » de M. Russell, c'est-à-dire les ensembles de tous les ensembles ne contenant qu'un, deux, trois, etc., éléments par N_1, N_2, N_3 , etc.

1° Prenons maintenant N_1 . Par définition c'est un objet unique, c'est-à-dire il existe un ensemble — désignons-le par (N_1) , — dont N_1 est le seul élément. Cet ensemble-là (N_1) doit être un élément de N_1 , car, dans le cas contraire N_1 ne contiendrait pas tous les ensembles se composant d'un (1) élément. Il serait donc faux de dire : « il n'y a qu'un seul nombre 1 », car d'après M. Russell⁴ le sens de cette proposition se réduit à l'inclusion d'un ensemble dans N_1 . Il est bien clair que la même chose peut se dire de chaque autre « nombre ». Par exemple N_3 doit se contenir lui-même, car l'ensemble (N_1, N_2, N_3) est tout aussi bien un ensemble à trois éléments que chaque autre, donc, par définition, contenu dans N_3 .

Il s'ensuit que chaque nombre contient en lui tous les autres, tout en étant lui-même contenu dans chacun des autres, et, ce qui est pire, ce n'est pas une seule fois qu'il y est contenu, mais toute une infinité!

2° Il est très facile de démontrer que chacun des ensembles N_1, N_2, \dots est équivalent à l'ensemble de tous les objets, of all things; nous désignerons cet ensemble par P.

Pour démontrer l'équivalence de deux ensembles, nous n'avons besoin que de démontrer l'existence d'une relation biuniforme entre ces ensembles, ou bien entre chaque ensemble et un sous-ensemble

1. Cf. *Principles of Mathematics*, p. 113.

2. Comme l'a judicieusement remarqué M. Couturat, *Principes des Mathématiques*, p. 46, cette définition est à peu près équivalente à celle de M. G. Frege *Grundlagen der Arithmetik*, p. 79. Par conséquent nos objections sont valables contre l'une aussi bien que contre l'autre.

3. Comme les expressions « classe » et « ensemble » signifient la même chose chez M. Russell, je ne parlerai plus bas que des ensembles.

4. *Principles of Mathematics*, cap. XI.

de l'autre ¹. L'existence de cette relation est évidente pour N_1 . Il suffit de coordonner chaque objet à l'ensemble dont il est l'élément unique. Il est presque aussi simple d'établir la relation pour tous les autres N . Par exemple, pour N_2 nous mettons chaque objet en rapport avec l'ensemble qui n'est formé que de cet objet même et le nombre zéro; le nombre zéro pourrait être coordonné à l'ensemble (1, 2) ou à quelque autre de ce genre. De cette manière nous avons établi une relation biuniforme entre P et un sous-ensemble de N_1 . Comme N_1 est lui-même un sous-ensemble de P , l'équivalence est démontrée, d'après le théorème de M. Bernstein ².

Il est évident que l'on peut établir une relation analogue pour chaque N .

L'ensemble P étant paradoxal ³, il s'ensuit que les N le sont aussi. Je crois que de ce qui précède se dégage bien nettement cette conclusion : que la définition de M. Russell, étant paradoxale, ne saurait servir de base à la mathématique, que ses nombres, n'existent pas, et par conséquent ne sont pas les nombres ordinaires de l'arithmétique. Le problème de la définition du nombre, et même de la possibilité d'une telle ⁴ doit donc être considéré comme parfaitement irrésolu.

1. Cf. Emile Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, note 1.

2. Cf. Hesseberg, *Grundbegriffe der Mengenlehre*. Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*.

3. D'après un théorème de M. G. Cantor, l'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble donné est d'une puissance plus haute que l'ensemble donné. Cela ne pourrait être vrai pour P , car il est évident qu'aucun ensemble ne peut avoir une puissance plus haute. Ce théorème devrait également être faux pour chaque N , car, un ensemble plus puissant que N_n devrait être aussi plus puissant que P , ce qui est absurde.

4. M. Peano préférerait poser les nombres comme indéfinissables, comme concepts primitifs, et je ne crois pas qu'il eût tort!

ALEXANDRE KOYRÉ.